Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

23 de Febrero de 2022

Indicaciones:

- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Considerar un proceso estocástico de tiempo discreto Y_n obtenido mediante muestreo periódico de un proceso continuo X_t, i. e. $Y_n = X_{nT}$ donde T es el período de muestreo.
Se pide:

(a) ¿Cuál es la relación entre la autocorrelación del proceso discreto $R_Y(n)$ y la autocorrelación del proceso continuo $R_X(\tau)$?

(b) Expresar la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto en función de la densidad espectral de potencia del proceso de tiempo continuo.

(c) ¿Bajo qué condición la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto es una representación **fiel** de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo?

Considerar ahora un proceso aleatorio en tiempo continuo X_t, con densidad espectral de potencia $S_X(f) = \Pi(f/2f_0)$. Suponer que se muestrea X_t, resultando la secuencia de variables aleatorias $Y_n = X_{nT}$.

(d) ¿Cuál es la autocorrelación del proceso en tiempo discreto?

(e) ¿Cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(f) Si la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo es ahora $S_X(f) = \Lambda(f/f_0)$, ¿cómo debería elegirse T para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

(g) ¿Qué requerimiento general debe cumplir el proceso continuo y el período de muestreo para que el proceso en tiempo discreto sea blanco?

Problema 2

Se desea analizar un sistema de comunicación AM ante la presencia de un eco interferente en recepción. La señal transmitida $x_c(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_c t)$, llega a destino con una interferencia aditiva de menor amplitud $x_I(t) = \alpha\, x_c(t - t_d)$, donde $0 < \alpha \ll 1$. El tiempo t_d se mide de forma experimental y luego se elige la frecuencia de la portadora f_c, tal que se cumpla la siguiente relación $2\pi f_c t_d = \frac{\pi}{2}$. El mensaje $x(t)$ tiene potencia S_x y ancho de banda W. Se considera un canal ideal, es decir que no hay ruido y la atenuación en potencia es $L = 1$. El objetivo es demodular esta señal de forma que el eco interferente afecte lo menos posible la detección.

(a) Dar el diagrama de bloques de un receptor de AM basado en un detector sincrónico.

(b) Estimar el error cometido al demodular con un receptor de AM basado en detección sincrónica, en función de α y los demás parámetros del problema.

(c) Dar el diagrama de bloques de un receptor de AM basado en un detector de envolvente.

(d) Estimar el error cometido al demodular con un receptor de AM basado en detección de envolvente, en función de α y los demás parámetros del problema.

(e) ¿Cuál de los receptores elegiría? Justificar la respuesta.

(f) Si se agrega ruido AWGN en recepción, con densidad espectral de potencia $\eta/2$, indicar la relación señal a ruido más interferencia (SINR) para el receptor elegido.

Nota: Puede resultar útil el desarrollo, $\sqrt{1+x} \simeq (1 + \frac{1}{2}\,x)$ con $|x| \ll 1$.

Pregunta 1

`Ergodicidad`.

1. Enunciar y detallar la hipótesis del teorema de ergodicidad en media cuadrática. Dar al menos dos condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla.

2. Sea X_t un proceso WSS de media no nula, ergódico en media, e $Y_t = AX_t$ donde A es una variable aleatoria independiente de X_t. ¿Es Y_t ergódico en media? Utilizar la parte anterior para probarlo.

Pregunta 2

`Modulación FM`.

1. Dar la expresión de la regla de Carson para la estimación del ancho de banda de la señal modulada en FM y explicar en qué se basa dicho cálculo.

2. Indicar cómo varía el ancho de banda en función del ancho de banda del mensaje W. Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si W aumenta como si disminuye.

3. Indicar cómo varía el ancho de banda en función de la constante de desviación en frecuencia f_Δ. Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si f_Δ aumenta como si disminuye.

4. Explicar la relación entre el ancho de banda de la señal modulada en FM y la relación señal a ruido en detección (SNR_D). Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si el ancho de banda aumenta como si disminuye.

Solución

Problema 1

(a)

$$R_Y(n) = \mathrm{E}[Y_m Y_{m+n}] = \mathrm{E}[X_{mT} X_{(m+n)T}] = R_X(nT)$$

(b) Podemos conisderar $R_X(\tau)$ como una señal de tiempo continuo, donde $R_Y(n)$, como vimos corresponde al muestreo de esta señal a una frecuencia $\frac{1}{T}$. Ahora podemos utilizar el resultado conocido para señales, obteniendo:

$$S_Y(e^{j\theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_X\left(\frac{\theta}{2\pi T} - \frac{k}{T}\right)$$

(c) La densidad espectral de potencia del proceso en tiempo discreto es una representación **fiel** de la densidad espectral de potencia del proceso en tiempo continuo si la frecuencia de muestreo es mayor o igual al doble del ancho de banda del proceso en tiempo continuo.

(d) La autocorrelación del proceso Y_n es:

$$R_Y(n,m) = \mathrm{E}[Y_n Y_m] = \mathrm{E}[X_{nT} X_{mT}]$$

En la letra se da la densidad espectral de potecia, la que puede existir sólo si el proceso es estacionario en sentido amplio. Entonces:

$$R_Y(n,m) = R_X(nT, mT) = R_X((n-m)T)$$

Por lo tanto el proceso en tiempo discreto también es estacionario en sentido amplio, y entonces tenemos:

$$R_Y(n) = R_X(nT)$$

(e) Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo.

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Pi(\frac{f}{2f_0})\} = 2f_0 sinc(2f_0 t) = \frac{2f_0 \sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0 t} = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$$

Entonces:

$$R_Y(n) = R_X(nT) = \frac{\sin(2\pi f_0 nT)}{\pi nT}$$

Para que sea ruido blanco, debe cumplirse que: $R_Y(n) = A\delta(n)$, es decir que $R_Y(n) = 0$ si $n \neq 0$, entonces hay que encontrar los valores de T para los que

$$\forall n \neq 0, \exists l \in \mathbb{Z} / 2\pi f_0 nT = l\pi$$

entonces

$$2f_0 nT \in Z, \forall n$$

Finalmente T es de la forma:

$$T = \frac{m}{2f_0}, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

(f) Calculemos primero la autocorrelación del proceso en tiempo continuo.

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\Lambda(\frac{f}{f_0})\} = f_0 sinc^2(f_0 t) = f_0 \frac{\sin^2(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0^2 t^2} = \frac{\sin(\pi f_0 t)}{\pi^2 f_0 t^2}$$

Razonando en forma análoga que en la parte anterior:

$$T = \frac{m}{f_0}, \text{ con } m \in \mathbb{Z}$$

(g) El proceso en tiempo continuo debe ser estacionario en sentido amplio, tener una autocorrelación no nula en cero (es decir no ser la señal nula), y anularse en puntos de la forma nT, para algún T y todo $n \neq 0$. El período de muestreo debe ser cualquiera de los T que cumplen la condición anterior.

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(2\pi f_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(4\pi f_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))\big[\cos(4\pi f_c t - 2\pi f_c t_d) + \cos(2\pi f_c t_d)\big]$$

ahora usando que se eligió $2\pi f_c$ para que $2\pi f_c t_d = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))\big[1 + \cos(4\pi f_c t)\big] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d)) \sin(4\pi f_c t)$$

y luego filtrando obtenemos que $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$, eliminando el término de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2}\mu x(t)$$

o sea que no hay error.

(c) Ver teórico.

(d)

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(2\pi f_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(2\pi f_c(t - t_d))$$

luego al pasarla por el detector de envolvente tenemos que

$$A_v(t) = A_c\sqrt{(1 + \mu x(t))^2 + \alpha^2 \left(1 + \mu x(t - t_d)\right)^2}$$

Haciendo ahora un desarrollo de primer orden de esta expresión con respecto al parámetro α obtenemos que

$$A_v(t) = A_c(1 + \mu x(t))\sqrt{1 + \alpha^2 \left(\frac{1 + \mu x(t - t_d)}{1 + \mu x(t)}\right)^2} \approx A_c(1 + \mu x(t)) \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{1 + \mu x(t - t_d)}{1 + \mu x(t)}\right)^2\right]$$

y después de eliminar el termino de continua obtenemos $r(t) \approx A_c\mu\, x(t) + \alpha^2\Big(z(t) - \big\langle z(t)\big\rangle\Big)$ donde $z(t) = \frac{A_c}{2}\frac{(1+\mu x(t-t_d))^2}{1+\mu x(t)}$.

(e) Elegimos el receptor basado en el detector sincrónico, ya que no presenta error en la recuperación del mensaje $x(t)$.

(f) Dado que con el receptor elegido no se genera interferencia en la detección, la SINR queda igual a la SNR para AM, es decir:

$$\text{SINR} = \frac{S}{N + I} = \frac{S}{N} = \text{SNR} = \frac{\mu^2 A_c^2 S_x}{2\eta W}$$

.

Pregunta

1. Ver teórico.
2. $$\mathbb{E}\left[\left|\langle Y(t)\rangle_T - m_Y\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left|A\langle X(t)\rangle_T - \mathbb{E}(A)\, m_X\right|^2\right] = \mathbb{E}\left(A^2\right) m_X^2 - \mathbb{E}(A)^2\, m_X^2$$

   Por lo que en general:
   $$\lim_{T\to+\infty} \mathbb{E}\left[\left|\langle Y(t)\rangle_T - m_Y\right|^2\right] \neq 0$$

Pregunta

Ver teórico.