Señales Aleatorias y Modulación
Examen - Parte 2

Instituto de Ingeniería Eléctrica

24 de Febrero de 2021

Problema 2

Considerar un proceso $X(t)$ definido por

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t \quad -\infty < t < \infty$$

donde ω es constante y U y V son variables aleatorias.

(a) Calcular la media y la autocorrelación de $X(t)$

(b) Mostrar que la condición

$$E(U) = E(V) = 0$$

es necesaria para que $X(t)$ sea estacionario.

(c) Mostrar que $X(t)$ es WSS si y solo si U y V son procesos no correlacionados con igual varianza; esto es,

$$E(UV) = 0 \quad E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma^2$$

Considerar ahora que U y V son independientes, cada una de las cuales toma valores -2 y 1 con probabilidades 1/3 y 2/3, respectivamente.

(d) Mostrar que $X(t)$ es WSS pero no SSS.

(e) ¿Es $X(t)$ ergódico en media y en autocorrelación? Justificar

Pregunta 2

`Modelo de error de cuantificación`.

1. Enunciar el modelo simple de error de cuantificación, dar su hipótesis de validez y sus principales características.
2. ¿Qué es el sobremuestreo de una señal y cómo afecta a la SNR de cuantificación?
3. Explicar cualitativamente el proceso de cuantificación no uniforme.

Solución

Problema 0

(a)

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(U)\cos\omega t + E(V)\sin\omega t \tag{1}$$

$$\begin{aligned} R_X(t,t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= E\{(U\cos\omega t + V\sin\omega t)[U\cos\omega(t+\tau) + V\sin\omega(t+\tau)]\} \\ &= \frac{1}{2}[E(U^2)+E(V^2)]\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t+\omega\tau) \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Si $X(t)$ es estacionario entonces la media no depende del tiempo, i. e.

$$\mu_X(t) = \mu_X = cte.$$

De la ec. (1) se observa que esto se cumple sólo si $E(U) = E(V) = 0$

(c) Si $X(t)$ es WSS, entonces

$$E\left[X^2(0)\right] = E\left[X^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = R_{XX}(0) = \sigma_X^2$$

pero $X(0) = U$ y $X(\pi/2\omega) = V$; entonces

$$E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma_X^2 = \sigma^2$$

Usando el resultado anterior y la ec. (2), se obtiene

$$R_X(t,t+\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t+\omega\tau)$$

el cual es función de τ sólo si $E(UV) = 0$.

En el sentido inverso, si $E(UV) = 0$ y $E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) = \sigma^2$ y utilizando los resultado obtenido en la parte (a), tenemos que

$$R_X(t,t+\tau) = \sigma^2\cos\omega\tau + E(UV)\sin(2\omega t+\omega\tau)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= 0 \\ R_X(t,t+\tau) &= \sigma^2\cos\omega\tau = R_X(\tau) \end{aligned}$$

por lo que $X(t)$ es WSS.

(d) Se tiene que

$$\begin{aligned} E(U) = E(V) &= \tfrac{1}{3}(-2) + \tfrac{2}{3}(1) = 0 \\ E\left(U^2\right) = E\left(V^2\right) &= \tfrac{1}{3}(-2)^2 + \tfrac{2}{3}(1)^2 = 2 \end{aligned}$$

Como U y V son independiente,

$$E(UV) = E(U)E(V) = 0$$

Entonces, utilizando los resultados de las partes anteriores $X(t)$ es WSS. Para ver que $X(t)$ no es SSS, consideraremos $E\left[X^3(t)\right]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} E\left[X^3(t)\right] &= E\left[(U\cos t + V\sin t)^3\right] \\ &= E\left(U^3\right)\cos^3 t + 3E\left(U^2V\right)\cos^2 t\sin t + 3E\left(UV^2\right)\cos t\sin^2 t + E\left(V^3\right)\sin^3 t \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} &E\left(U^3\right) = E\left(V^3\right) = \frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{2}{3}(1)^3 = -2 \\ &E\left(U^2V\right) = E\left(U^2\right)E(V) = 0 \quad E\left(UV^2\right) = E(U)E\left(V^2\right) = 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$E\left[X^3(t)\right] = -2\left(\cos^3 t + \sin^3 t\right)$$

el cual es función de t. Como todos los momentos de un proceso SSS deben ser independientes del tiempo, se deduce que $X(t)$ no es SSS.

(e)

$$
\begin{aligned}
\langle X(t)\rangle_T &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[U\cos(\omega t)+V\sin(\omega t)\right]dt \\
&= \frac{1}{2T\omega}\left[U\sin(\omega t)-V\cos(\omega t)\right]\Big|_{t=-T}^{T} \xrightarrow{T\to+\infty} 0=\mu_X \\
\langle R_X(\tau)\rangle_T &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[U\cos(\omega t)+V\sin(\omega t)][U\cos(\omega(t+\tau))+V\sin(\omega(t+\tau))]dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau+UV\sin\omega(2t+\tau)\right]dt \\
&= \frac{U^2+V^2}{2}\cos(\omega\tau)-\left[\frac{1}{2T}\frac{\cos\omega(2t+\tau)}{2\omega}\right]_{t=-T}^{T} \xrightarrow{T\to+\infty} \frac{U^2+V^2}{2}\cos(\omega\tau).
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que

$$
\lim_{T\to+\infty} E[|\langle X(t)\rangle_T-\mu_X|^2]=0
$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} E[|\left\langle R_X(\tau)\right\rangle_T-R_X(\tau)|^2] &= E\left[\left|\frac{U^2+V^2}{2}\cos\omega\tau-\sigma^2\cos\omega\tau\right|^2\right] \\
&= \left\{\left[E(U^4)+E(V^4)\right]/4-\sigma^2/2\right\}\cos\omega\tau=\cos\omega\tau\neq 0
\end{aligned}
$$

Entonces $X(t)$ es ergódico en la media pero no ergódico en la autocorrelación.

Pregunta

Ver teórico.