Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

11 de Diciembre de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.

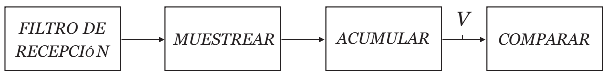
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

Problema 2

Se desea comparar el desempeño de dos sistemas de comunicación analógica. El mensaje a transmitir $m(t)$ tiene un ancho de banda W y potencia $P = 0.5$. En ambos sistemas la potencia de trasmisión máxima permitida es $S_T = 5$ W. Se asume que la atenuación entre el trasmisor y el receptor es $L = 50$ dB, y este último agrega ruido con densidad espectral de potencia $S_n(f) = \frac{N_0}{2} = 10^{-10}$ W/Hz.

El primer sistema usa modulación AM y el receptor se basa en detección de envolvente. El índice de modulación es $k_a = 0.95$ y el ancho de banda disponible es el de AM comercial $B_T = 10$ kHz.

(a) Hallar el máximo ancho de banda del mensaje W que soporta este sistema.

(b) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

El segundo sistema corresponde a modulación FM. En este caso se utiliza el mismo ancho de banda máximo del mensaje W calculado para el primer sistema, y se dispone de un ancho de banda máximo de transmisión $B_T = 180$ kHz.

(c) Hallar el máximo índice de desviación de frecuencia que se puede utilizar.

(d) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

(e) ¿Cuál de los dos métodos analizados utilizaría? Justificar la elección.

Pregunta 1

`Procesos Estocásticos.`

1. Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).
2. Sea X_t un proceso WSS con autocorrelación $R_X(\tau)$ y Y_t la salida de un filtro LTI, estable, de respuesta en fecuencia $H(f)$ y entrada X_t. Obtener la autocorrelación $R_Y(\tau)$ y la autocorrelación cruzada R_{XY}.
3. ¿El poceso Y_t es WSS? Justificar

Pregunta 2

`Modulación analógica AM.`

1. Dar la expresión temporal de la señal transmitida $x_{AM}(t)$, para un mensaje $m(t)$ con potencia P.
2. Calcular la potencia de las bandas laterales S_{bl} y de la portadora S_c
3. Realizar el diagrama de bloques de los posibles receptores: detector síncrono y de envolvente.
4. Siendo AM una modulación lineal, ¿qué implicancias tiene esto cuando se reciben dos señales AM superpuestas? Pensar por ejemplo el caso de dos emisoras transmitiendo en la misma portadora, ¿qué detectaría un receptor sintonizando dicha frecuencia?¿qué se escucharía?¿existe alguna diferencia según cuál sea el tipo de receptor?

Solución

Problema 1

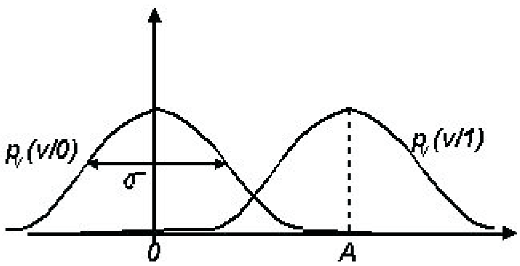
(a) Sé que a la entrada del comparador, la señal v es de la forma $v[k] = x[k] + n[k]$, donde x es la señal que se envió, y n representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $v[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $v[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de v serían dos deltas, una en 0 y otra en A, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_V(v|0) &= p_N(v) \\ p_V(v|1) &= p_N(v-A) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.



(b) Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y A.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza σ^2.

(c) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}} .P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}} .P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left. \frac{\partial P_e}{\partial v} \right|_{min} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P_{e0} &= \textstyle\int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} &= \textstyle\int_{-\infty}^{u} p_V(v|1)dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = \frac{A}{2}$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = A^2.P_A + 0^2.P_0 = \frac{A^2}{2}$, y $N_R = \sigma^2$, con lo que $\frac{A}{2\sigma} = \sqrt{SNR_R/2}$, y entonces:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

(d) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k] + n[k] + x[k-1] + n[k-1] + \ldots + x[k-m+1] + n[k-m+1] = mx[k] + n'[k]$$

Luego, si transmití un 0, tendré que $v'[k] = n'[k]$, mientras que si transmití un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.

Siendo $n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2.

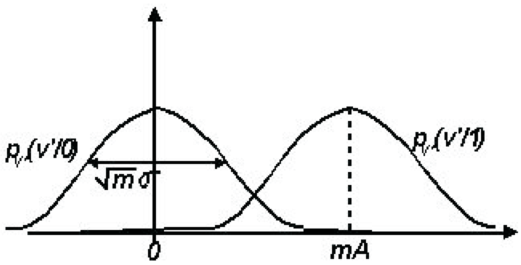
Observar que no podemos suponer que el ruido $n[k], n[k-1], ..., n[k-m+1]$ sean independientes entre si. Para poder asegurar lo anterior, debemos verificar que la autocorrelación del rudio muestreado a frecuencia f_s es una delta (es decir que es un proceso blanco), lo cual en principio no resulta evidente ya que el ruido muestreado no es blanco, dado que fue previamente recortado por el filtro pasabajos.

Por lo anterior, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, y por lo tanto su autocorrelación es $R_n(\tau) = \eta.B.sinc(2B\tau)$. Dada la forma de $sinc(2B\tau)$, función que se anula en los múltiplos de $1/2B$, se tiene entonces que la máxima frecuencia de muestreo que puede usarse es justamente de $2B$, pudiéndose emplear alternativamente frecuencias de valor $2B/n$, con n entero. De esta forma, la autocorrelación del proceso ruido muestreado es una delta y podemos garantizar la independencia de los distintos instantes de ruido.

Por lo tanto, podemos suponern que los $n[i]$ son independientes con lo cual la varianza de $n'[k]$ es igual a $m.\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{V'}(v'|0) &\sim N(0, \sqrt{m}\sigma) \\ p_{V'}(v'|1) &\sim N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(e) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + 0}{2} = \frac{mA}{2}$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{2\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}.A^2 + \frac{1}{2}.0^2 = \frac{A^2}{2}$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

(f) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{2\sigma} = \frac{A}{2\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La **mejora** consiste en que la potencia transmitida, S'_T, igual a $\frac{A'^2}{2} = \frac{A^2}{2m}$, es menor que la anterior.

Sin embargo, esta opción tiene como **contrapartida** que demora m veces más tiempo en transmitir la misma información (es decir, el flujo de información disminuye).

Si quisiera mantener el flujo de información, entonces tendría que aumentar la cadencia. La nueva cadencia será $r' = mr = m/T$, y por lo tanto el ancho de banda mínimo también deberá ser mayor: $B'_{mín} = r' = mr = B_{mín}$.

Problema 2

(a) Las condiciones que debe cumplir el ancho de banda del mensaje W son dos:

1. Ancho de banda permitido:
$$W \leq \frac{1}{2} B_T^{\text{máx}} \Rightarrow W \leq 5 \text{ kHz}$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{LN_0 B_T} \geq 10 \Rightarrow W \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20LN_0} = 25 \text{ kHz}$$

De la condición más restrictiva surge que $W \leq 5$ kHz.

(b) Con el ancho de banda obtenido en la parte anterior garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale:
$$\text{SNR}_D = \frac{\mu^2 P}{1 + \mu^2 P} \frac{S_T^{\text{máx}}}{LN_0 W} \approx 15 \text{ dB}$$

(c) Las condiciones que debe cumplir el índice de modulación D son dos

1. Ancho de banda permitido:

$$B_T = 2(D+1)W \leq B_T^{\text{máx}} = 180 \text{ kHz} \Rightarrow D \leq \frac{B_T^{\text{máx}}}{2W} - 1 = 17$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{LN_0 B_T} \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{2LN_0(D+1)W} \leq 10 \Rightarrow D \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20LN_0 W} - 1 = 4$$

De la condición más restrictiva surge que $D \leq 4$. Siendo $W = 5$ kHz, esto implica que $k_f = 20$ kHz. Si se utiliza la aproximación más conservadora de B_T con el término (D+2), el resultado queda $D \leq 3$ y de esa forma un índice máximo $k_f = 15$ kHz.

(d) Con los parámetros definidos garantizamos que cumplimos con la condición de umbral. De esta forma, la relación señal a ruido post detección queda (con $D = 4$):

$$\text{SNR}_D = 3D^2 P \frac{S_T^{\text{máx}}}{LN_0 W} = 33.8 \text{ dB}.$$

El resultado con $D = 3$ es $\text{SNR}_D = 31.8$ dB.

(e) Basados en la SNR obtenida post detección, utilizando la misma potencia transmitida es más conveniente el sistema FM.

Pregunta

Ver teórico.

Pregunta

1. $x_{AM}(t) = A_c(1 + k_a m(t))cos(2\pi f_c t + \theta)$.
2. $S_{bl} = A_c^2 \mu^2 P/4$; $S_c = A_c^2/2$.
3. Realizar el diagrama de bloques de los posibles receptores: detector síncrono y de envolvente.
4. Es de esperar que en general se escuchen ambos mensajes superpuestos. Si se utiliza un detector sincrónico y ambas señales tienen diferencias de fase, el detector no podrá sincronizar su fase con ambas. Por lo tanto, según la diferencia de fase que haya entre ellas, será la diferencia de volumen al escuchar una y otra. En el caso del detector de envolvente la diferencia de fase afectará directamente cómo queda la envolvente de la suma. Por tanto, en este caso será más difícil poder escuchar ambos mensajes, a menos que ambas señales tengan una diferencia de fase pequeña.