

Señales Aleatorias y Modulación

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

14 de Diciembre de 2023

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta 1

Se considera el problema de estimar un proceso de interés $V(t)$ a partir de un proceso observado $U(t)$ mediante el filtro de Wiener.

1. Enunciar las hipótesis y condiciones de optimalidad del filtro de Wiener. Dar su respuesta en frecuencia $\hat{h}(f)$ (*no se pide su deducción*).
2. Se considera ahora que el proceso observado es una versión ruidosa del proceso de interés,

$$U(t) = V(t) + N(t),$$

con $N(t)$ un ruido WSS, independiente de $V(t)$, de media nula y densidad espectral de potencia $S_N(f)$. Especifique cómo queda $\hat{h}(f)$ en este caso, y a partir de su expresión explique cómo opera el filtro, interpretando su efecto sobre la señal y sobre el ruido.

Pregunta 2

Modulación FM.

1. Dar la expresión de la regla de Carson para la estimación del ancho de banda de la señal modulada en FM y explicar en qué se basa dicho cálculo.
2. Indicar cómo varía el ancho de banda en función del ancho de banda del mensaje W . Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si W aumenta como si disminuye.
3. Indicar cómo varía el ancho de banda en función de la constante de desviación en frecuencia f_Δ . Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si f_Δ aumenta como si disminuye.
4. Explicar la relación entre el ancho de banda de la señal modulada en FM (B_T^{FM}) y la relación señal a ruido en detección (SNR_D). Detallar los distintos casos y la variación esperada tanto si el ancho de banda aumenta como si disminuye.

Problema 1

Una señal $x(t)$ WSS de media nula es modulada en **AM**. Esta señal llega con un eco interferente de menor amplitud, es decir la señal a la entrada del receptor es de la forma:

$$v(t) = x_c(t) + \alpha x_c(t - t_d).$$

El tiempo de eco t_d se mide experimentalmente y luego se elige la frecuencia de la portadora ω_c de forma que se cumpla la siguiente relación $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$.

- Demostrar que la señal modulada en AM $x_c(t)$ es WSS.
- Hallar $R_{x_c}(\tau)$ y $S_{x_c}(f)$, conocidos $R_x(\tau)$ y $S_x(f)$.
- Demostrar que $v(t)$ es WSS.
- Hallar $R_v(\tau)$ y $S_v(f)$, conocidos $R_x(\tau)$ y $S_x(f)$.
- Se propone utilizar un demodulador sincrónico como receptor. Dibujar el diagrama de bloques del sistema y encontrar la salida detectada.
- Si la transmisión se hace en presencia de ruido AWGN con densidad espectral de potencia $S_n(f) = \eta/2$, calcular la SNR_D obtenida con el detector sincrónico en función de los parámetros del sistema.

Problema 2

Trabajando para el Puerto de Montevideo, se requiere su asesoramiento técnico para el desarrollo de un sistema de comunicación inalámbrica. La solución debe permitir comunicaciones de voz para personal técnico distribuido en los distintos muelles y terminales, con un requerimiento de distancia máxima de 1.5 km y una mínima SNR_D de 20 dB.

Este sistema debe operar en la banda de UHF, en frecuencias comprendidas entre 467.5 MHz y 467.7 MHz. La modulación a utilizar será banda lateral única superior (USSB) con una potencia máxima de transmisión de 2 W. La única atenuación a considerar es la del aire, la cual se modela de forma simplificada con la ecuación de pérdidas en espacio libre de Friis: $L_{aire}(d) = (4\pi fd/c)^2$, siendo $c = 3 \times 10^8$ m/s. Se desprecia tanto la ganancia de las antenas, así como otras pérdidas en cables y conectores. Además los amplificadores de recepción introducen un ruido AWGN con $\eta_A = 10^{-15}$ W/Hz.

- Mostrar que no es posible usando modulación doble banda lateral (DSB) y un ancho de banda del audio $W = 10$ kHz, tener 8 canales con una separación mínima de 10 kHz.
- Hallar para el caso de modulación USSB el ancho de banda del audio máximo para tener 8 canales con una separación mínima de 10 kHz. Indicar las frecuencias centrales de los canales resultantes.

En el diseño final se define operar con un ancho de banda de audio de $W = 15$ kHz y una potencia de señal $P_x = 0.5$. Recordar que la modulación elegida es USSB.

- Determinar la mínima potencia de transmisión S_T para que el sistema opere correctamente en todas las frecuencias posibles.

Finalmente, para evitar las fluctuaciones de volumen, el receptor debe tener una salida de audio con potencia P_x igual a la original, sin importar la distancia entre los equipos en el puerto.

- Explicar cómo se podría lograr esto añadiendo a la señal modulada en USSB una señal piloto de amplitud constante en la frecuencia cero del mensaje de audio (donde justamente no hay información). Hacer el diagrama de bloques del receptor correspondiente.
- Assumiendo que la portadora tiene amplitud A_c y que la señal piloto tiene amplitud constante A_{Ref} . ¿Cuál sería la ganancia que debería tener el amplificador de recepción para lograr una salida de potencia P_x igual a la original?

Solución

Pregunta

Ver teórico.

Pregunta

Ver teórico.

Problema 1

(a) Al plantear la esperanza tenemos

$$E[x_c(t)] = E[(1 + \mu x(t)) \cos(w_c t + \theta)] = E[(1 + \mu x(t))]E[\cos(w_c t + \theta)]$$

con $\theta \sim U(-\pi, \pi)$ independiente de $x(t)$.

Como

$$E[\cos(w_c t + \theta)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(w_c t + \theta) = 0$$

al ser la integral de un coseno en un número entero de ciclos,

$$E[x_c(t)] = 0$$

la cual no depende de t .

Para la autocorrelación tenemos

$$R_{x_c}(t, s) = (1 + \mu^2 R_x(t - s)) \frac{\cos w_c(t - s)}{2} \quad (\text{ver ej. 3 del práctico 1})$$

la cual depende de t y s a través de su diferencia. Por lo que $x_c(t)$ es WSS.

(b)

$$R_{x_c}(t, s) = (1 + \mu^2 R_x(t - s)) \frac{\cos w_c(t - s)}{2}$$

y

$$S_{x_c}(f) = \frac{1}{4} (\delta(f - fc) + \mu^2 S_x(f - fc) + \delta(f + fc) + \mu^2 S_x(f + fc))$$

(c) Al plantear la esperanza tenemos

$$E[v(t)] = E[x_c(t) + x_c(t - t_d)] = E[x_c(t)] + E[x_c(t - t_d)]$$

la cual no depende de t ya que $E[x_c(t)]$ no depende de t . Para la autocorrelación tenemos

$$\begin{aligned} R_v(t, s) &= E[v_t v_s] = E[(v_c(t) + x_c(t - t_d))(x_c(s) + x_c(s - t_d))] \\ &= E[x_c(t)x_c(s)] + E[x_c(t)x_c(s - t_d)] + E[x_c(t - t_d)x_c(s)] + E[x_c(t - t_d)x_c(s - t_d)] \\ &= 2R_{x_c}(t - s) + R_{x_c}(t - s + t_d) + R_{x_c}(t - s - t_d) \end{aligned}$$

la cual depende de t y s a través de su diferencia. Por lo que $v(t)$ es WSS.

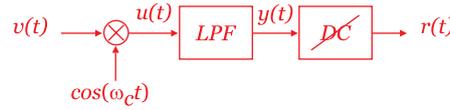
(d)

$$R_v(\tau) = 2R_{x_c}(\tau) + R_{x_c}(\tau + t_d) + R_{x_c}(\tau - t_d)$$

y

$$S_v(f) = S_{x_c}(f) (2 + e^{-j2\pi f t_d} + e^{j2\pi f t_d}) = 2S_{x_c}(f)(1 + \cos(2\pi f t_d))$$

(e)



En el detector sincrónico

$$v(t) = A_c(1 + \mu x(t)) \cos(\omega_c t) + \alpha A_c(1 + \mu x(t - t_d)) \cos(\omega_c(t - t_d))$$

por lo tanto

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))[1 + \cos(2\omega_c t)] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d))[\cos(2\omega_c t - \omega_c t_d) + \cos(\omega_c t_d)]$$

ahora usando que se eligió ω_c para que $\omega_c t_d = \frac{\pi}{2}$ obtenemos que

$$u(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))[1 + \cos(2\omega_c t)] + \frac{\alpha A_c}{2}(1 + \mu x(t - t_d)) \sin(2\omega_c t)$$

y luego filtrando obtenemos que $y(t) = \frac{A_c}{2}(1 + \mu x(t))$, eliminando el termino de continua obtenemos

$$r(t) = \frac{A_c}{2} \mu x(t).$$

Se observa que el eco no afecta la detección.

(f) En este caso no aparecen errores en la detección debidas a la interferencia, entonces estamos en las condiciones analizadas en teórico para un detector sincrónico de AM. Entonces la $SNR_D = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \frac{S_R}{\eta W}$. Donde tenemos que $S_R = S_T$ ya que no hay atenuación en el canal.

Problema 2

(a) Si el ancho de banda del audio es $W = 10$ kHz entonces el ancho de banda de transmisión de DSB para cada uno de los 8 canales será $B_T = 20$ kHz. Además hay 70 kHz que corresponden a la separación entre canales, por lo que el ancho de banda total necesario sería $160 \text{ kHz} + 70 \text{ kHz} = 230 \text{ kHz}$, lo cual supera los 20 kHz disponibles.

(b) Teniendo un ancho de banda total de 200 kHz, de los cuales 70 kHz quedan para la separación entre canales, se deduce que el ancho de banda máximo de cada canal debe ser $B_T^{max} = 130 \text{ kHz}/8 = 16.25 \text{ kHz}$. Las frecuencias centrales de los canales resultantes quedan 467.5 MHz, 467526.25 kHz, 467552.5 kHz, 467578.75 kHz, 467605 kHz, 467631.25 kHz, 467657.5 kHz y 467683.75 kHz respectivamente.

(c) La distancia máxima es de 1.5km y la frecuencia máxima 467683.75 kHz, lo cual nos da una atenuación máxima de 89.36 dB.

Para USSB la $SNR_D = S_T/L\eta_A W$.

Por lo tanto, para que la SNR_D sea mayor a 20 dB se requiere que $S_T > SNR_D L\eta_A W$, lo que implica un valor mínimo de $S_T^{min} = 1.3 \text{ W}$.

(d) Enviando una señal piloto con amplitud constante, la misma se podría filtrar en recepción y de esa forma obtener la atenuación del canal. Luego se debería filtrar dicha señal del mensaje, con un filtro suprime banda que elimine la continua. Finalmente, a partir de la atenuación del canal se puede manejar un amplificador con ganancia variable que logre mantener constante la potencia de salida.

(e) La potencia recibida $S_R = S_T/L$, siendo $S_T = A_c^2 P_x/4$.

Por otro lado la portadora de referencia llega con potencia $S_R^{pilot} = A_{Ref}^2/2L$.

Por lo tanto, debemos despejar L de la potencia recibida de la señal piloto y usarla para recuperar la potencia del mensaje. De esta forma, la ganancia la podemos calcular como:

$$g = 4L/A_c^2$$

$$g = 2A_{Ref}^2/(A_c^2 \cdot S_R^{pilot})$$

De esa forma, $g \cdot S_R$ queda P_x tal como se pretendía. Para esto asumimos que el oscilador del detector sincrónico tiene un factor x2 multiplicativo, de lo contrario este factor también debería agregarse a la ganancia.