

Señales Aleatorias y Modulación

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

13 de diciembre de 2022

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se desea transmitir símbolos de una fuente binaria IID con bits equiprobables, generados a una tasa r . Para ello se utiliza un sistema de transmisión pasabanda, en el cual una señal PAM con pulso de conformación rectangular modula un portadora de frecuencia f_c (Esta modulación se conoce como BPSK (Binary Phase Reversal Keying)). La señal transmitida puede expresarse como

$$x_c(t) = \left[\sum_k a_k p(t - kT - \theta) \right] \cos(\omega_c t + \phi) = x_{PAM}(t) \cos(\omega_c t + \phi)$$

donde ϕ es una fase aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, 2\pi]$, θ es un desplazamiento aleatorio distribuido uniformemente en $[0, T]$, $p(t)$ es un pulso rectangular de duración $T = 1/r$ y a_k es una secuencia binaria equiprobable que toma los valores A y -A. La frecuencia de la portadora f_c se elige de forma que es múltiplo de r . El canal de transmisión cumple las hipótesis usuales con atenuación L e introduce ruido AWGN con densidad espectral de potencia $\eta/2$.

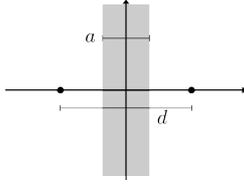
Se pide:

- (a) Dar un diagrama de bloques completo de un receptor basado en un filtro de apareado.
- (b) Hallar el espectro de la señal transmitida, estimar el ancho de banda B_T y bosquejar su espectro.
- (c) Hallar las componentes de señal y de ruido a la entrada del comparador en el receptor. Hallar a partir de ellas la probabilidad de error.
- (d) Calcular la energía de bit E_b y expresar la probabilidad de error en función de E_b

Se quiere evaluar cómo se afecta la probabilidad de error (P_e) cuando se utiliza decodificación de errores y borrado. En lugar de hacer la decisión a favor de un símbolo podemos declarar borrado para algunos valores de detección (ver la siguiente figura). Se define $\alpha = \frac{a}{d}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) donde d es la separación entre los símbolos en detección y a el ancho de la zona de borrado.

- (e) Hallar las expresiones para P_e y la P_{bor} (probabilidad de borrado) como una función de E_b y α .
- (f) Determinar el valor de α para que se cumpla que $P_{\text{bor}} = 2P_e$, suponiendo que $P_e = 10^{-5}$. Calcular la SNR para este caso.

Observación: La motivación para buscar $P_{\text{bor}} = 2P_e$ en la parte (f) viene dada porque generalmente un código corrector de errores, para una distancia de código dada, puede detectar el doble de los errores de los que puede corregir.



Problema 2

Se desea comparar el desempeño de dos sistemas de comunicación analógica. El mensaje a transmitir $m(t)$ tiene ancho de banda W y potencia $P = 1$. En ambos sistemas la potencia de transmisión máxima permitida es $S_T = 10$ kW. Se asume que el canal es un medio duro, donde la atenuación entre el trasmisor y el receptor es $L = 80$ dB. Este último agrega ruido AWGN, predominante frente al ruido introducido en el canal, con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \frac{\eta}{2}$, siendo $\eta = 10^{-9}$ W/Hz. El primer sistema usa modulación AM, usando un receptor basado en detección de envolvente y diseñando para operar por encima del umbral. El índice de modulación es $k_a = 0.95$ y el ancho de banda disponible es el de AM comercial $B_T = 10$ kHz. El segundo sistema corresponde a modulación DSB, utilizando un repetidor en el punto óptimo y el mismo ancho de banda hallado anteriormente. El repetidor analógico no es ideal, por lo que introduce ruido AWGN, el cual se asume tiene las mismas características que el del receptor.

- Hallar el máximo ancho de banda del mensaje que soporta este sistema.
- Para el ancho de banda hallado, calcular la máxima relación señal a ruido en detección posible.
- Hacer el diagrama de bloques completo del segundo sistema propuesto, indicando el modelo de canal y ruido correspondiente.

Se puede ver que al aumentar la ganancia del repetidor siempre aumenta la SNR_D . Si bien esto es cierto, fijando el resto de los parámetros del problema, existe un valor de G (que llamaremos G_M) a partir del cual ya no vale la pena seguir aumentando el valor ya que su incidencia en la SNR_D es muy pequeña.

- Asumiendo que la ganancia del receptor compensa la atenuación del tramo previo del canal, hallar la ganancia del repetidor G_M y calcular para dicho caso la SNR_D correspondiente.
- Si tuviera que elegir, ¿cuál de los dos sistemas analizados utilizaría? Discutir las ventajas y desventajas de cada uno para tomar la decisión.

Pregunta 1

Procesos Estocásticos.

- Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).
- Sea X_t un proceso WSS con autocorrelación $R_X(\tau)$ y Y_t la salida de un filtro LTI, estable, de respuesta en frecuencia $H(f)$ y entrada X_t . Obtener la autocorrelación $R_Y(\tau)$ y la autocorrelación cruzada R_{XY} .
- ¿El proceso Y_t es WSS? Justificar

Pregunta 2

Modulación FM.

- Dar la expresión temporal de una señal genérica $m(t)$ modulada en FM e indicar su potencia.
- Para el caso particular de un tono modulado en FM (es decir, $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$) esbozar la señal temporal y su espectro. Indicar la condición que se debe cumplir para considerar que se trata de FM de banda angosta.
- Dar la fórmula general para la estimación del ancho de banda en FM (regla de Carson) y explicar en qué se basa dicho cálculo.

Solución

Problema 1

(a) Ver teórico.

(b) El espectro del proceso x_c está dado por,

$$S_c(f) = \frac{1}{4}(S_{PAM}(f - f_c) + S_{PAM}(f + f_c))$$

mientras que el espectro de $x_{PAM}(t)$ se obtiene utilizando la conocida fórmula para el espectro de una señal PAM. En este caso la secuencia a_k tiene media nula y varianza A^2 por lo que se tiene que,

$$S_{PAM}(f) = A^2 r |P(f)|^2 = \frac{A^2}{r} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{r}\right)$$

Para estimar el ancho de banda necesario el criterio de mantener más del 90% de la energía corresponde con eliminar el espectro fuera del primer cero del sinc^2 y se tiene que $B_T = 2r$, por otro lado el criterio de poder detectar el pulso corresponde a cortar el sinc^2 en la mitad de su lóbulo principal y el ancho de banda en ese caso sería $B_T = r$.

(c) La señal recibida está dada por,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\sum_k a_k p(t) \right] \cos(\omega_c t + \phi) + n(t)$$

donde $n(t)$ es el ruido que se introduce en el canal, y L es la atenuación sufrida por la señal en el canal. Como estamos en el caso de señalización polar equiprobable, tenemos que la probabilidad de error está dada por,

$$P_e = Q\left(\frac{|\hat{a}_1 - \hat{a}_0|}{2\sigma}\right)$$

donde los \hat{a}_i son los valores que tomaría la señal en el instante de muestreo en ausencia de ruido y σ es la varianza del ruido en el instante de muestreo. Calcularemos primero los valores \hat{a}_i . Notar que dada la señalización estos toman valores opuestos, por lo que solo se calculará uno de ellos. Si la miramos en un intervalo del tipo $[kT, (k+1)T]$ el valor de \hat{a}_1 queda dado por:

$$\hat{a}_1 = \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{2A}{\sqrt{L}} \cos^2(\omega_c t + \phi) dt = \frac{AT}{\sqrt{L}}$$

ya que f_c es múltiplo de r . Ahora es necesario hallar la potencia del ruido en el instante de muestreo. Este está dado por:

$$N[k] = \int_{kD}^{(k+1)D} n(t) \cos(\omega_c t) dt.$$

De esto se puede ver que el ruido $N[k]$ es gaussiano pues es combinación lineal de variables aleatorias gaussianas. Además es inmediato ver que tiene media nula. Su potencia está dada por,

$$\mathbf{E}(N^2[k]) = \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} R_n(t-t') \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t') dt dt'.$$

Pero sabemos que $R_n(\tau) = \eta\delta(\tau)$, de modo que

$$\mathbf{E}(n^2[k]) = \sigma^2 = \eta T$$

con lo que el proceso $N[k]$ queda caracterizado. Sustituyendo en la ecuación de la probabilidad de error tenemos,

$$P_e = Q\left(\frac{\frac{2AT}{\sqrt{L}}}{2\sqrt{\eta T}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{\eta L}}\right).$$

(d)

$$E_b = \int_0^T \left(\frac{A}{\sqrt{L}} \cos(w_c t) \right)^2 dt = \frac{A^2 T}{2L}$$

por lo que

$$P_e = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \right) = Q(k)$$

con

$$k = \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}$$

(e)

$$P_e = p_1 Q \left(\frac{\hat{a}_1 + a/2}{\sigma} \right) + p_0 Q \left(\frac{a/2 - \hat{a}_0}{\sigma} \right) = Q \left(\frac{d/2 + a/2}{\sigma} \right) = Q \left(\frac{(1 + \alpha) d}{2\sigma} \right) = Q \left((1 + \alpha) \sqrt{\frac{2E_b}{\eta}} \right) = Q((1 + \alpha) k)$$

$$P_{\text{bor}} = 1 - P_e - P_{\text{correcto}}$$

$$P_{\text{correcto}} = p_1 \left(1 - Q \left(\frac{\hat{a}_1 - a/2}{\sigma} \right) \right) + p_0 \left(1 - Q \left(\frac{-a/2 - \hat{a}_0}{\sigma} \right) \right) = 1 - Q((1 - \alpha) k)$$

$$P_{\text{bor}} = -Q((1 + \alpha) k) + Q((1 - \alpha) k)$$

(f)

$$P_e = 10^{-5} \Rightarrow (1 + \alpha) k = Q^{-1}(10^{-5}) = 4.3$$

$$P_{\text{bor}} = 2P_e = 2 \cdot 10^{-5} \Rightarrow (1 - \alpha) k = Q^{-1}(3 \cdot 10^{-5}) = 4$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = \frac{4.3}{4} = 1.075 \Rightarrow \alpha = 0.0361$$

$$k = 4.15$$

Problema 2

(a) Las condiciones que debe cumplir el ancho de banda del mensaje W son dos:

1. Ancho de banda permitido:

$$W \leq \frac{1}{2} B_T^{\text{máx}} \Rightarrow W \leq 5 \text{ kHz}$$

2. Umbral en la SNR_R :

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow W \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20L\eta} = 5 \text{ kHz}$$

Ambas condiciones imponen la misma restricción, por lo que resulta $W_{\text{máx}} = 5 \text{ kHz}$.

(b) Con el ancho de banda obtenido en la parte anterior garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale:

$$\text{SNR}_D = \frac{k_a^2 P}{1 + k_a^2 P} \frac{S_T^{\text{máx}}}{L\eta W_{\text{máx}}} = 9.8 \text{ dB}$$

(c) El sistema se compone de un repetidor analógico luego del primer tramo del canal, el cual introduce ruido que predomina frente al ruido del canal, y luego tiene una ganancia G en potencia. La atenuación de ambos tramos de canal es $L^{1/2}$, ya que el repetidor está en el punto medio. Luego el receptor está basado en detección sincrónica, por lo que tiene un filtro pasabanda a la entrada, seguido de un mezclador de frecuencia f_c y finalmente un pasabajos de ancho de banda W .

(d) La SNR_D para DSB está dada por la expresión S_D/R_D donde S_D corresponde a la potencia de la señal detectada, mientras que el ruido tendrá dos componentes, una por el ruido que introduce el repetidor y otra por el ruido que introduce el receptor. Por un lado, la potencia de la señal detectada queda:

$$S_D = \frac{S_T G L^{1/2}}{L^{1/2} L^{1/2}} = \frac{S_T G}{L^{1/2}}$$

Por otro lado, dado que la ganancia del repetidor es G en potencia, y que el receptor tiene ganancia igual a la atenuación de un tramo que corresponde a la mitad del canal, la componente de ruido queda:

$$R_D = \frac{N_1 G L^{1/2}}{L^{1/2}} + N_2 L^{1/2} = N_1 G + N_2 L^{1/2}$$

Juntando ambas partes tenemos

$$SNR_D = S_D/R_D = \frac{S_T G}{L^{1/2}} \frac{1}{(N_1 G + N_2 L^{1/2})} = \frac{S_T}{L^{1/2}} \frac{G}{(N_1 G + N_2 L^{1/2})}$$

Maximizar la SNR_D en G es equivalente a minimizar el término $N_1 + N_2 L^{1/2}/G$. Si bien es claro que a mayor G este término será cada vez menor, también está claro que cuando N_1 sea mucho mayor al término que depende de G , esta ganancia dejará de influir de forma significativa en la SNR_D . Esa situación se dará cuando $N_1 \gg N_2 L^{1/2}/G$, es decir $N_1 > 10 N_2 L^{1/2}/G$, lo que nos permite despejar el valor de $G_M = 10 N_2 / N_1 L^{1/2}$. Dado que ambos ruidos son iguales (η_{B_T}), el cociente $N_2/N_1 = 1$, lo que resulta en $G_M = 10 L^{1/2} = 50$ dB.

De esta forma la relación señal a ruido resultante queda:

$$SNR_D = \frac{S_T}{L^{1/2}} \frac{G_M}{(\eta_{B_T} G_M + \eta_{B_T} L^{1/2})} = 49.6 \text{ dB}$$

(e) En base a la SNR_D obtenida para cada caso, es claro que el desempeño del segundo sistema es mucho mejor. En términos de potencia transmitida, en ambos casos estamos usando la misma, por lo que el gasto de energía será equivalente en ese punto. Sin embargo, el primer sistema al usar AM utiliza una parte importante de la potencia transmitida para enviar la portadora. Esto resulta en un receptor más sencillo y por lo tanto de menor costo. Además el segundo sistema utiliza un repetidor, con lo cual también tendremos gastos adicionales en la instalación y mantenimiento de ese punto.

Pregunta

Ver teórico.

Pregunta

Ver teórico.