Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

10 de Diciembre de 2021

Indicaciones:

- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- En los problemas prácticos pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

El objetivo de este ejercicio es estudiar dos formas clásicas de reducir o mitigar los efectos del ruido de cuantización: sobre-muestreo temporal y *noise shaping*.

Para esto, consideremos el proceso WSS $X(t)$, de ancho de banda B y potencia P_X, que asumiremos normalizado (en el sentido de la media cuadrática) al rango $-1 \leq X(t) \leq 1$. Llamaremos $T_s = \frac{1}{f_s} \geq \frac{1}{2B}$ al período de muestreo, y $X[n] := X(nT_s)$ al proceso en tiempo discreto resultante. La cuantización será realizada mediante el cuantizador uniforme Q de paso q que a todo valor $x \in [-1, 1]$ asigna el valor

$$Q(x) = \left\lfloor \frac{x}{q} + \frac{1}{2} \right\rfloor q = \text{round}\left(\frac{x}{q}\right) q.$$

En lo que sigue asumiremos que se cumple el modelo aditivo de ruido de cuantización

$$X_q[n] := Q(X[n]) = X[n] + \varepsilon[n],$$

donde el ruido de cuantización $\varepsilon[n]$ es WSS, blanco, independiente de la señal, con densidad de probabilidad uniforme en $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right]$. Se pide:

(a) Calcular la media y la potencia del ruido de cuantización, que llamaremos σ_ε^2. Deducir su densidad espectral de potencia $S_\varepsilon(e^{i2\pi f/f_s})$, en función de q y de f_s.

(b) Supongamos que el proceso $X(t)$ se sobre-muestrea un factor M con respecto a la frecuencia de Nyquist, i.e. $f_s = 2BM$. Para recuperar la señal analógica se utiliza como filtro de reconstrucción un filtro pasabajo ideal de ancho de banda B. Llamaremos $X_r(t)$ a la señal analógica reconstruida.

1. Graficar las densidades espectrales de potencia de $X[n]$ y $\varepsilon[n]$, y de la señal analógica $X_r(t)$ reconstruida a la salida. Calcular la relación señal a ruido a la salida, que llamaremos SNR_M.
2. Interpretar cualitativamente por qué el sobre-muestreo reduce el efecto del ruido de cuantización. ¿Cuál es el problema que impide tomar M tan grande como uno quiera?

(c) En esta parte, se considera el diagrama de la figura 1, en donde se combinan las operaciones de sobre-muestreo ($f_s = 2BM$) y de *noise shaping*.

1. Deduzca la expresión de la transformada $\mathcal{Z}$ de $Y[n]$, $\hat{Y}(z)$, en función de las transformadas $\mathcal{Z}$ de $X[n]$ y de $\varepsilon[n]$, i.e. $\hat{X}(z)$ y $\hat{\varepsilon}(z)$.

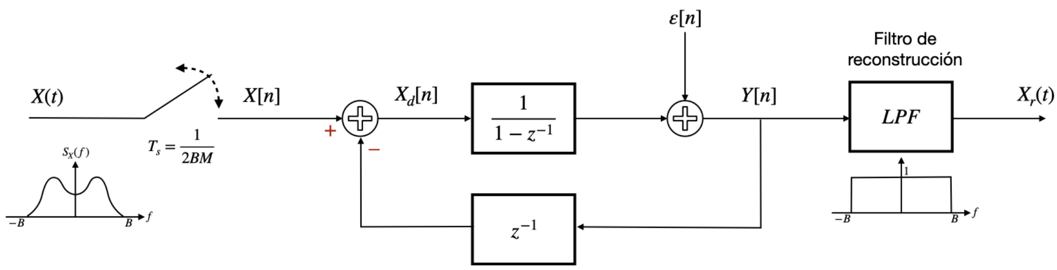

Figura 1: Diagrama correspondiente a la parte (c) del Problema 1.

2. Calcule y grafique las densidades espectrales de potencia de las componentes de señal y de ruido de cuantización a la salida del sistema.
   Nota: se recuerda que $|1 - e^{-i\theta}|^2 = 4\sin^2(\theta/2)$.
3. Calcule la relación señal a ruido a la salida del sistema, que llamaremos SNR_M^{ns}. Comparando SNR_M^{ns} con SNR_M, explique los beneficios de utilizar la técnica de *noise shaping*.
   Nota: para el cálculo de la potencia de la componente de ruido, se sugiere utilizar la aproximación $\sin u \simeq u$, válida para valores de u pequeños.

Problema 2

Se desea comparar el desempeño de dos sistemas de comunicación analógica. El mensaje a transmitir $x(t)$ tiene un ancho de banda W_x y potencia $S_x = 1$. En ambos sistemas la potencia de trasmisión máxima permitida es $S_T = 10$ W. Se asume que la atenuación entre el trasmisor y el receptor es $L = 40$ dB, y este último agrega ruido con densidad espectral de potencia $G_n(f) = \frac{\eta}{2} = 10^{-9}$ W/Hz.

El primer sistema usa modulación AM y el receptor se basa en detección de envolvente. El índice de modulación es $\mu = 0.25$ y el ancho de banda disponible es el de AM comercial $B_T = 10$ kHz.

(a) Hallar el máximo ancho de banda del mensaje que soporta este sistema.

(b) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

El segundo sistema corresponde a modulación FM y se dispone de un ancho de banda $B_T = 180$ kHz.

(c) Hallar el máximo índice de desviación de frecuencia que se puede utilizar.

(d) Calcular la máxima relación señal a ruido en detección que se puede obtener.

(e) ¿Cuál de los dos métodos analizados utilizaría? Justificar la elección.

Pregunta 1

(a) Definir un proceso estacionario en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS). ¿Bajo qué condiciones un proceso SSS es WSS? ¿Bajo qué condiciones un proceso WSS es SSS?

(b) Sea $X(t)$ ruido blanco e $Y(t)$ la salida de un filtro pasabajo LTI estable con entrada $X(t)$. ¿Es $Y(t)$ un proceso WSS? Justificar.

Pregunta 2

1. Realizar el diagrama de un transmisor AM y los dos posibles receptores vistos en el curso explicando cada bloque.

2. Hallar el desempeño de ambos, comparando el resultado y las hipótesis. ¿Ocurre lo mismo para modulación DSB?

Solución

Problema 1

(a)

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon[n]\right] = \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon \frac{1}{q} d\varepsilon = 0$$

$$\mathbb{E}\left(\varepsilon^2[n]\right) = \int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon^2 \frac{1}{q} d\varepsilon = \left.\frac{\varepsilon^3}{3q}\right|_{-q/2}^{q/2} = \frac{q^2}{12}$$

$$S_\varepsilon\left(e^{j2\pi f/f_s}\right) = \frac{q^2}{12 f_s} \quad \text{(la PSD es constante por ser ruido blanco e integra la potencia en } [-f_s/2, f_s/2])$$

(b) Las PSDs de señal y ruido se muestran en la figura 2. El ruido de cuantización, luego de ser filtrado

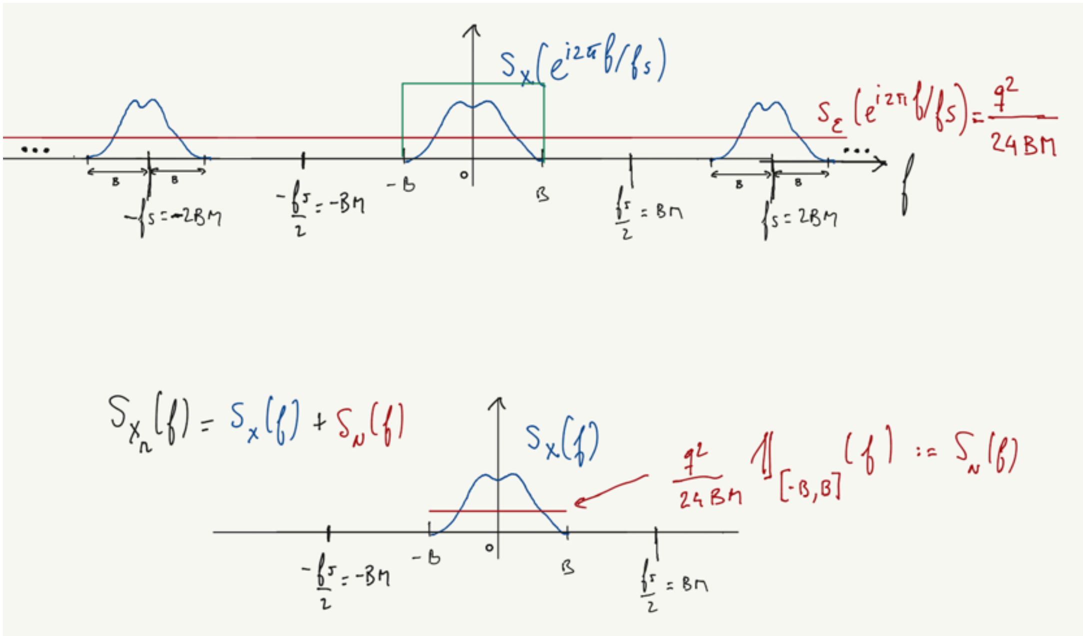

Figura 2: Graficas correspondiente la parte (b) del Problema 1.

por el filtro de reconstrucción, tiene potencia

$$P_N = \sigma_\varepsilon^2 \cdot 2B = \frac{q^2}{12 \cdot (2BM)} \cdot 2B = \frac{q^2}{12M}.$$

Luego,

$$SNR_M = \frac{P_X}{P_N} = \frac{12MP_X}{q^2}$$

(c)

$$\hat{X}_d(z) = \hat{X}(z) - z^{-1}\hat{Y}(z)$$

$$\hat{Y}(z) = \varepsilon(z) + \frac{\hat{X}_d(z)}{1 - z^{-1}}$$

$$\Rightarrow \hat{Y}(z) = \hat{\varepsilon}(z)\left(1 - z^{-1}\right) + \hat{X}(z)$$

La potencia PSD de la componente de ruido antes del filtro de reconstrucción, que llamamos $N[n]$, es entonces

$$\begin{aligned} S_N(e^{i\theta}) &= \left|1 - e^{-i\theta}\right|^2 S_\varepsilon\left(e^{i\theta}\right) \\ &= \frac{q^2}{12(2BM)} 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $\theta = \frac{2\pi}{2BM} f = \frac{\pi}{BM} f$. Las gráficas de las PSDs se muestran en la figura 3.

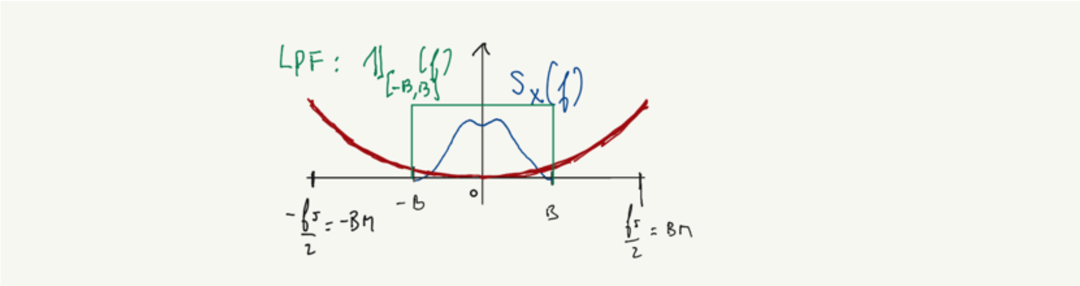

Figura 3: Graficas correspondiente la parte (c) del Problema 1.

Luego, la potencia de la componente de ruido a la salida del filtro de reconstrucción vale

$$\begin{aligned} \int_{-B}^{B} S_N\left(e^{\left(i\frac{\pi}{BM}f\right)}\right) df &= \frac{q^2}{6BM} \int_{-B}^{B} \sin^2\left(\frac{\pi}{2BM} f\right) df \\ &\simeq \frac{q^2}{6BM} \int_{-B}^{B} \frac{\pi^2}{(2BM)^2} f^2 df = \frac{\pi^2 q^2}{12 \cdot 3 \cdot M^3}. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces

$$SNR_M^{\text{ns}} \simeq \frac{36 M^3 P_X}{\pi^2 q^2}.$$

Concluimos que, a igual SNR, la introducción del módulo de *noise shaping* permite no subir a niveles tan altos de sobre-muestreo, y de esta forma evitar los artefactos que surgen de la pérdida del carácter blanco del ruido de cuantificación.

Problema 2

(a) Las condiciones que debe cumplir el ancho de banda del mensaje W_x son dos:

1. Ancho de banda permitido:

$$W_x \leq \frac{1}{2} B_T^{\text{máx}} \Rightarrow W_x \leq 5 \text{ kHz}$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow W_x \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20 L\eta} = 25 \text{ kHz}$$

De la condición más restrictiva surge que $W_x \leq 5$ kHz.

(b) Con el ancho de banda obtenido en la parte anterior garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale

$$\text{SNR}_D = \frac{\mu^2 S_x}{1 + \mu^2 S_x} \frac{S_T^{\text{máx}}}{L\eta W_x} = 7.7 \text{ dB}$$

(c) Las condiciones que debe cumplir el índice de modulación D son dos

1. Ancho de banda permitido:

$$B_T = 2(D+1)W_x \leq B_T^{\text{máx}} = 180 \text{ kHz} \Rightarrow D \leq \frac{B_T^{\text{máx}}}{2W_x} - 1 = 17$$

2. Umbral en la SNR_R:

$$\text{SNR}_R \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{L\eta B_T} \geq 10 \Rightarrow \frac{S_T}{2L\eta(D+1)W_x} \leq 10 \Rightarrow D \leq \frac{S_T^{\text{máx}}}{20L\eta W_x} - 1 = 4$$

De la condición más restrictiva surge que $D \leq 4$. Se utilizó $W_x = 5$ kHz.

(d) Con los parámetros definidos garantizamos que cumplimos con la condición de umbral y vale

$$\text{SNR}_D = 3D^2 S_x \frac{S_T^{\text{máx}}}{L\eta W_x} = 36.7 \text{ dB}.$$

(e) Basados en la SNR obtenida en detección utilizando la misma potencia transmitida es más conveniente el sistema FM.