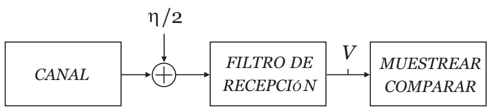
Señales Aleatorias y Modulación
Examen - Parte 1

Instituto de Ingeniería Eléctrica

18 de Diciembre de 2020

Problema 1

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.



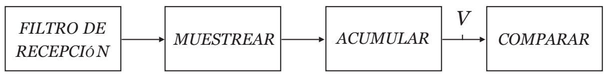
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

Pregunta 1

`Procesos Estocásticos.`

1. Definir un proceso estocástico en sentido estricto (SSS) y en sentido amplio (WSS).

2. Sea X_t un proceso WSS con autocorrelación $R_X(\tau)$ y Y_t la salida de un filtro LTI, estable, de respuesta en fecuencia $H(f)$ y entrada X_t. Obtener la autocorrelación $R_Y(\tau)$ y la autocorrelación cruzada R_{XY}.

3. ¿El poceso Y_t es WSS? Justificar

Solución

Problema 1

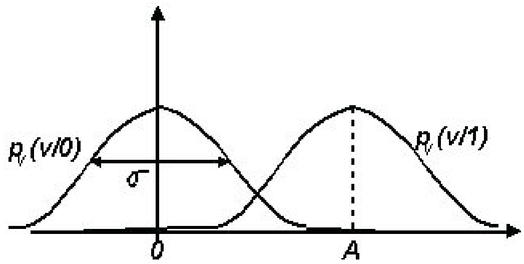
(a) Sé que a la entrada del comparador, la señal v es de la forma $v[k] = x[k] + n[k]$, donde x es la señal que se envió, y n representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $v[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $v[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de v serían dos deltas, una en 0 y otra en A, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_V(v|0) &= p_N(v) \\ p_V(v|1) &= p_N(v-A) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.



(b) Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y A.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza σ^2.

(c) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}} .P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}} .P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left.\frac{\partial P_e}{\partial v}\right|_{min} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P_{e0} &= \int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} &= \int_{-\infty}^{u} p_V(v|1)dv \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = \frac{A}{2}$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = A^2.P_A + 0^2.P_0 = \frac{A^2}{2}$, y $N_R = \sigma^2$, con lo que $\frac{A}{2\sigma} = \sqrt{SNR_R/2}$, y entonces:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

(d) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k] + n[k] + x[k-1] + n[k-1] + \ldots + x[k-m+1] + n[k-m+1] = mx[k] + n'[k]$$

Luego, si transmití un 0, tendré que $v'[k] = n'[k]$, mientras que si transmití un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.

Siendo $n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2.

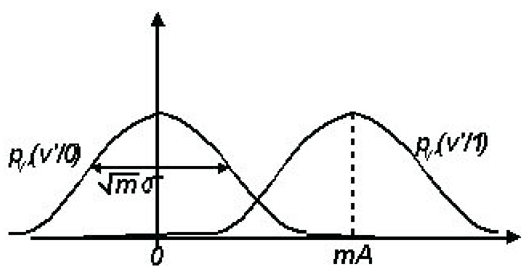
Observar que no podemos suponer que el ruido $n[k], n[k-1], ..., n[k-m+1]$ sean independientes entre si. Para poder asegurar lo anterior, debemos verificar que la autocorrelación del rudio muestreado a frecuencia f_s es una delta (es decir que es un proceso blanco), lo cual en principio no resulta evidente ya que el ruido muestreado no es blanco, dado que fue previamente recortado por el filtro pasabajos.

Por lo anterior, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, y por lo tanto su autocorrelación es $R_n(\tau) = \eta.B.sinc(2B\tau)$. Dada la forma de $sinc(2B\tau)$, función que se anula en los múltiplos de $1/2B$, se tiene entonces que la máxima frecuencia de muestreo que puede usarse es justamente de $2B$, pudiéndose emplear alternativamente frecuencias de valor $2B/n$, con n entero. De esta forma, la autocorrelación del proceso ruido muestreado es una delta y podemos garantizar la independencia de los distintos instantes de ruido.

Por lo tanto, podemos suponern que los $n[i]$ son independientes con lo cual la varianza de $n'[k]$ es igual a $m.\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{V'}(v'|0) &\sim N(0, \sqrt{m}\sigma) \\ p_{V'}(v'|1) &\sim N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(e) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + 0}{2} = \frac{mA}{2}$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{2\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}.A^2 + \frac{1}{2}.0^2 = \frac{A^2}{2}$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

(f) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{2\sigma} = \frac{A}{2\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La **mejora** consiste en que la potencia transmitida, S'_T, igual a $\frac{A'^2}{2} = \frac{A^2}{2m}$, es menor que la anterior.

Sin embargo, esta opción tiene como **contrapartida** que demora m veces más tiempo en transmitir la misma información (es decir, el flujo de información disminuye).

Si quisiera mantener el flujo de información, entonces tendría que aumentar la cadencia. La nueva cadencia será $r' = mr = m/T$, y por lo tanto el ancho de banda mínimo también deberá ser mayor: $B'_{mín} = r' = mr = B_{mín}$.

Pregunta

Ver teórico.