Señales Aleatorias y Modulación
Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

11 de Diciembre de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1

Se quiere transmitir información proveniente de una fuente estacionaria que genera símbolos cada T segundos, $a_k = \{0, 1\}$ independientes, con probabilidad q y $(1-q)$ respectivamente.

(a) Calcular la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso.

Se utiliza un pulso conformador $p(t)$ para la transmisión por un canal analógico. Llamemos $x(t)$ a la señal conformada.

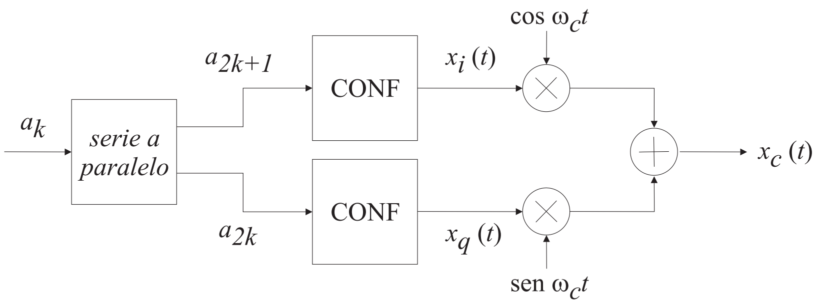
(b) Dar una expresión para $x(t)$. ¿Qué condiciones deben cumplirse para que $x(t)$ sea un proceso estacionario y ergódico?

(c) Calcular la densidad espectral de potencia de $x(t)$. Determinar el ancho de banda cuando $p(t) = \Pi(\frac{t}{T})$.

Se desea transmitir la señal $x(t)$ por un canal con mala respuesta en bajas frecuencias. Se utilizará una modulación pasabanda, en la cual $x(t)$ modula la amplitud de una sinusoide. Llamemos $x_c(t)$ a la señal pasabanda.

(d) Calcular la densidad espectral de potencia de $x_c(t)$ y el ancho de banda necesario para su transmisión.

Ahora se considera el sistema de la siguiente figura,

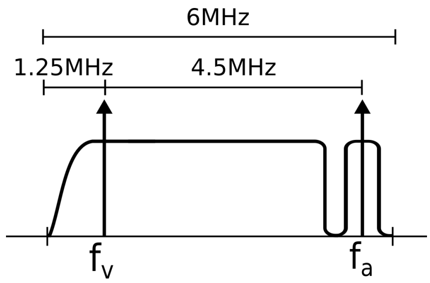


(e) Explicar el funcionamiento del sistema.

(f) Calcular la densidad espectral de potencia de $x_c(t)$ y el ancho de banda necesario. Comparar con la modulación de la parte (d).

Problema 2

El estándar de televisión analógica que se utiliza en Uruguay tiene un ancho de banda de 6 MHz, en el cual se transmiten tanto la señal de video como la de audio. La señal de video tiene un ancho de banda de 4.25 MHz y se modula en banda lateral vestigial (VSB), donde la banda vestigial tiene un ancho de 1.25 MHz. Para el ejercicio se asume que la potencia de la banda inferior es despreciable frente a la de la banda superior (i.e. equivalente a SSB). La señal de audio tiene un ancho de 15 kHz y se modula en FM, con $f_\Delta = 25$ kHz. Las frecuencias portadoras de la señal de video (f_v) y audio (f_a) están separadas 4.5 MHz. En la figura se puede ver un bosquejo del espectro total de la señal modulada.



El receptor[1] introduce ruido AWGN, con densidad espectral de potencia $\frac{\eta}{2}$ con $\eta = 10^{-14}$ Watt/Hz. Se asume una relación de potencia de transmisión entre la señal de video y la señal de audio de 10:1.

(a) El canal asignado a Televisión Nacional del Uruguay (TNU) es el 5 de la banda VHF, que va de 76 a 82 MHz. ¿Cuáles son las respectivas frecuencias de las portadoras de video y audio para TNU?

(b) ¿Cuál es la mínima potencia de transmisión de la señal de video si se quiere recibir con una SNR_D de 30 dB a una distancia de 5 km?

(c) Ahora se coloca un repetidor en la mitad del camino, que introduce ruido AWGN análogo al del receptor. ¿Cuál es el nuevo valor de la mínima potencia de transmisión?

(d) ¿Cuál es el ancho de banda de la señal de audio modulada?

(e) ¿Cuál es la SNR_D de la señal de audio con y sin el repetidor?

[1] La atenuación está dada por la ecuación de Friis en espacio libre $L = (\frac{4\pi d f}{c})^2$, siendo $c = 3 \times 10^8$ m/s.

Solución

Problema 1

(a) La autocorrelación de la señal es:

- $n \neq m$

$$R_a[n,m] = \mathbb{E}\{a[n]a[m]\} = \mathbb{E}\{a[n]\}\,\mathbb{E}\{a[m]\} = m_a^2 = $$
$$= (0\,q + 1\,(1-q))(0\,q + 1\,(1-q)) = (1-q)^2$$

- $n = m$

$$R_a[n,n] = \mathbb{E}\{a[n]^2\} = 0\,q + 1\,(1-q) = (1-q)$$

Luego:

$$R_a[n] \quad = \quad (1-q)\delta[n] + \sum_{k\neq 0}(1-q)^2\delta[n-k]$$

Entonces, la densidad espectral de potencia es:

$$G_a(f) = (1-q) + \frac{(1-q)^2}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(f-k/T)$$

(b) Si el pulso presenta un retardo $t_d \sim U[0,T]$, la señal conformada es un proceso estacionario y ergódico. Entonces, se tiene:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, p(t-kT-t_d)$$

(c) La señal enviada es una señal PAM, por lo que su densidad espectral de potencia es:

$$G_x(f) = \frac{\sigma_a^2|P(f)|^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|P(k/T)|^2\delta(f-k/T)$$

donde $\sigma_a^2 = R_a[0] - m_a^2 = (1-q) - (1-q)^2 = q\,(1-q)$.
Entonces:

$$G_x(f) = \frac{q\,(1-q)|P(f)|^2}{T} + \left(\frac{1-q}{T}\right)^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|P(k/T)|^2\delta(f-k/T)$$

Si el pulso $p(t)$ es rectangular, es decir, $p(t) = \Pi(\frac{t}{T})$, entonces $P(f) = T\,sinc(fT)$. Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada es:

$$G_x(f) = q\,(1-q)\,T\,sinc^2(fT) + (1-q)^2\delta(f)$$

El ancho de banda mínimo necesario para poder recuperar la amplitud de los pulsos es

$$B_T \geq \frac{1}{2T}$$

(d) La autocorrelación en este caso queda

$$R_{x_c}(\tau) = \frac{1}{2}\,R_x(\tau)\cos\omega_c\tau$$

Para la modulación pasabanda elegida, el espectro es el espectro de la señal bandabase centrado en $\pm f_c$,

$$G_{x_c}(f) = \frac{1}{4}\,G_x(f) * (\delta(f+f_c) + \delta(f-f_c))$$

El ancho de banda necesario en este caso es el doble que en la parte anterior por ser una modulación pasabanda,

$$B_T \geq \frac{1}{T}$$

(e) Se manda un bit modulado en fase y el siguiente modulado en cuadratura. La duración del pulso es el doble que en el caso anterior pues no se puede transmitir información más rápido de lo que genera la fuente.

(f) Se tiene que las señales $x_i(t)$ y $x_q(t)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k+1} p_c(t - k2T + t_d) \\ x_q(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k} p_c(t - k2T + t_d) \end{aligned}$$

donde $p_c(t) = \Pi(\frac{t}{2T})$ y t_d es un retardo uniformemente distribuido en $[0, 2T]$. Entonces, $x_c(t)$ será:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x_i(t)\cos(\omega_c t) + x_q(t)\sin(\omega_c t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k+1}\, p_c(t - k2T)\cos(\omega_c t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{2k}\, p_c(t - k2T)\sin(\omega_c t) \end{aligned}$$

La autocorrelación de la señal queda

$$R_{x_c} = \frac{1}{2} R_{x_i}(\tau)\, \cos\omega_c\tau + \frac{1}{2} R_{x_q}(\tau)\, \sin\omega_c\tau$$

La densidad espectral de potencia de la señal $x_c(t)$ será:

$$G_{x_c}(f) = \frac{G_{x_i}(f + f_c) + G_{x_i}(f - f_c)}{4} + j\,\frac{G_{x_q}(f + f_c) - G_{x_q}(f - f_c)}{4}$$

donde tanto $G_{x_i}(f)$ como $G_{x_q}(f)$ corresponden al espectro de las señales PAM $x_i(t)$ y $x_q(t)$ respectivamente.
Como estamos trabajando con $p(t) = \Pi(\frac{t}{2T})$, el único término de la sumatoria presente en las densidades espectrales de potencia de las señales PAM que sobrevivirá, será el correspondiente a $k = 0$. En consecuencia:

$$G_{x_i}(f) = G_{x_q}(f) = \alpha\, sinc^2(2fT) + \beta\, \delta(f)$$

donde α y β son constantes que dependen de los parámetros del sistema.
Finalmente,

$$\begin{aligned} G_{x_c}(f) = \ & \alpha \left[(1 + j)\, sinc^2(2T(f + f_c)) + (1 - j)\, sinc^2(2T(f - f_c))\right] + \\ & +\beta\ [(1 + j)\, \delta(f + f_c) + (1 - j)\, \delta(f - f_c)] \end{aligned}$$

El ancho de banda necesario es la mitad del ancho de banda anterior. Mas el sistema presenta una complejidad mayor en su construcción.

Problema 2

(a) $f_v = 76 + 1,25$ MHz $= 77,25$ MHz.
$f_a = f_v + 4,5$ MHz $= 81,75$ MHz.

(b) Señal de video modulada: $v_v = \frac{A_v}{2}[x_v(t)cos(w_v t) + (\hat{x_v}(t) + x_\beta(t))sen(w_v t)]$
$R_{v_v}(\tau) = \frac{A_v^2}{4}[R_{x_v}(\tau)\frac{cos(w_v\tau)}{2} + R_{\hat{x_v}+x_\beta}(\tau)\frac{cos(w_v\tau)}{2}]$
$R_{v_v}(0) = \frac{A_v^2}{4}[\frac{S_{x_v}}{2} + \frac{S_{\hat{x_v}+x_\beta}}{2}] = S_{R_v}$. Suponiendo que potencia de x_β es despreciable $S_{R_v} \approx \frac{A_v^2}{4}[\frac{S_{x_v}}{2} + \frac{S_{\hat{x_v}}}{2}] = \frac{A_v^2}{4}S_{x_v}$
$S_{T_v} = LS_{R_v}$ Donde $L = (\frac{4\pi d f_v}{c})^2 = 2,6 \times 10^8$
Señal de video demodulada $y_v = \frac{A_v}{2}x_v(t) + n_i(t)$
$\text{SNR}_{D_v} = \frac{A_v^2}{4}S_{x_v}\frac{1}{\eta B_{T_v}}$, donde $B_{T_v} = 4,25 + 1,25 = 5,5$MHz. $\text{SNR}_{D_v} = \frac{S_{T_v}}{L\eta B_{T_v}}$
$S_{T_v} > 14,3$KW

(c) $\text{SNR}_{D_v} = \frac{S_{T_v}}{L_r 2\eta B_{T_v}} = \frac{2S_{T_v}}{L\eta B_{T_v}}$, con $L_r = (\frac{4\pi d/2 f_v}{c})^2 = L/4$ $S_{T_v} > 14,3/2 = 7,1$ KW

(d) $B_{T_a} = 2(f_\Delta + \alpha W_a) = 2(25+15) = 80$ kHz para $\alpha = 1$. Pero $D = 1,7$, por lo que tal vez conviene la aproximación más conservadora. Con $\alpha = 2$ queda $B_{T_a} = 110$ kHz.

(e) La potencia de la señal de audio transmitida es diez veces menor que la de video $\text{SNR}_{D_a} = 3(\frac{f_\Delta}{W_a})^2 S_{x_a} \frac{S_{T_a}}{L\eta W_a}$ y $\text{SNR}_{R_a} = \frac{S_{T_a}}{L\eta B_{T_a}} > 10$
Con repetidor $\text{SNR}_{D_a} = 3(\frac{f_\Delta}{W_a})^2 S_{x_a} \frac{S_{T_a}}{L_r 2\eta W_a}$ y $\text{SNR}_{R_a} = \frac{S_{T_a}}{L_r 2\eta B_{T_a}} > 10$