Señales Aleatorias y Modulación
Primer Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Setiembre de 2019

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Pregunta [5 pts.]

(a) ¿Cuáles son condiciones necesarias y suficientes para que un proceso X_t WSS sea ergódico en media? Enunciar y detallar la hioótesis del teorema de ergodicidad en media cuadrática y dar al menos dos condiciones.

(b) Sea X_t un proceso WSS, de media $\mu \neq 0$, ergódico en media, y $Y_t = AX_t$, donde A es una variable aleatoria independiente de X_t. ¿Es Y_t ergódico en media? Utilizar la parte anterior para probarlo.

Problema 1 [15 pts.]

Sea X_t un proceso WSS con características de ruido blanco, gausiano, de media nula y densidad espectral de potencia $\eta/2$. Sea Y_t la salida de un filtro pasa bajos ideal de ancho de banda B y entrada X_t.
Se pide:

(a) Calcular la autocorrelación y la densidad espectral de potencia del proceso Y_t.

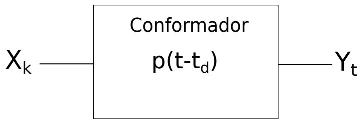
(b) Calcular la potencia a la salida del filtro.

(c) Si $\tau = \frac{1}{2B}$, hallar la densidad de probabilidad conjunta de Y_τ y $Y_{t+\tau}$. ¿Son Y_τ y $Y_{t+\tau}$ independientes? Justificar.

Nota: Recordar que la combinación lineal de procesos gaussianos es también un proceso gaussiano.

Problema 2 [15 pts.]

Se quiere trasmitir una secuencia X_k binaria iid., donde los 1 tienen probabilidad p_b y se les asigna el valor A y los 0 tienen probabilidad $1 - p_b$ y se les asigna el valor $-A$. La secuencia se quiere trasmitir a una cadencia de $r = \frac{1}{T}$ $bits/s$. Para adecuar la señal al canal se conforma la señal PAM Y_t con el pulso $p(t)$.



Se pide:

(a) Hallar y graficar la autocorrelación de la secuencia discreta de entrada y su densidad espectral de potencia.

Para que el proceso Y_t sea estacionario se considera que el pulso de conformación se encuentra retardado un tiempo t_d respecto al origen de la secuencia, con t_d uniformemente distribuido en el intervalo $[0, T]$.

(b) Hallar la densidad espectral de potencia de Y_t en función de p_b.

(c) 1. Hallar y graficar para el caso en que el conformador saca pulsos rectangulares de ancho T.
   2. Discutir cómo afecta p_b la forma del espectro.

Problema 3 [15 pts.]

Una señal X_t es enviada por un transmisor y en el receptor se recibe la señal $Y_t = X_t + X_{t-\Delta_t} + Z_t$ (el receptor recibe la señal original, su eco y ruido aditivo). X_t es un proceso WSS de media nula con densidad espectral de potencia $S_X(f)$ y Z_t ruido blanco, gaussiano, de media nula y densidad espectral de potencia $S_Z(f) = \eta/2$, independiente de X_t. Se pide

(a) Hallar $S_Y(f)$ en funcion de $S_X(f)$, Δ_t, y η

(b) Hallar la densidad espectral de potencia conjunta $S_{XY}(f)$

(c) ¿Cuál es es el filtro que aplicado a Y_t produce el estimado $\hat{X}_t$ que minimiza el error cuadŕatico medio respecto a X_t? Hallar su expresión en funcion de $S_X(f)$, Δ_t, y η

(d) ¿Cómo actúa este filtro para las frecuencias en donde el ruido domina a la señal ($\eta \gg S_X(f)$) y viceversa?

Solución

Pregunta

(a) Ver teórico.

(b)

$$C_Y(\tau) = E(A^2)C_X(\tau) + m_X^2(E[A^2] - E[A]^2)$$

por lo que en general

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T} C_Y(\tau)d\tau \neq 0$$

Problema 1

(a) La respuesta en frecuencia de un filtro pasabajos ideal es

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq B \\ 0 & \text{si } |f| > B \end{cases}$$

La densidad espectral de potencia de Y_t es $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$, entonces

$$S_Y(f) = \begin{cases} \eta/2 & \text{si } |f| \leq B \\ 0 & \text{si } |f| > B \end{cases}$$

La autocorrelación de Y_t es la transformada inversa de Fourier de $S_Y(f)$ por lo que

$$R_Y(\tau) = \eta B sinc(2B\tau)$$

(b)

$$P_Y = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \eta B$$

(c) Primeramente observemos que

$$E[Y_t Y_{t+\tau}] = R_Y(\tau) = \eta B sinc(2B/2B) = 0$$

por lo que Y_τ y $Y_{t+\tau}$ son no correlacionados. Como son procesos gaussianos su no correlación implica que son independientes. Por lo tanto

$$p_{Y_\tau, Y_{t+\tau}}(x,y) = p_{Y_\tau}(x)p_{Y_{t+\tau}}(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}$$

con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = \eta B$

Problema 2

(a) Planteamos el cálculo de la autocorrelación:

- $n \neq m$

$$R_X[n,m] = \mathbb{E}\{X_n X_m\} = \mathbb{E}\{X_n\}\mathbb{E}\{X_m\} = m_X^2 = (p_b A + (1-p_b)(-A))^2 = A^2(2p_b - 1)^2$$

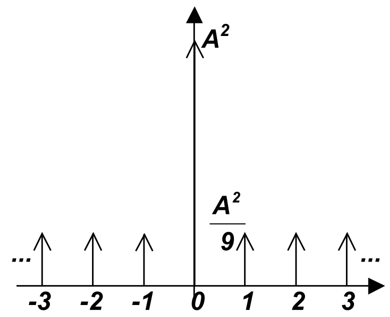
- $n = m$

$$R_X[n,n] = \mathbb{E}\left\{X_n^2\right\} = A^2 p_b + (-A)^2(1-p_b) = A^2$$

Entonces:

$$R_X[n] = A^2\delta[n] + \sum_{k\neq 0} A^2(2p_b-1)^2\delta[n-k]$$

La forma de la autocorrelación se muestra en la siguiente figura.



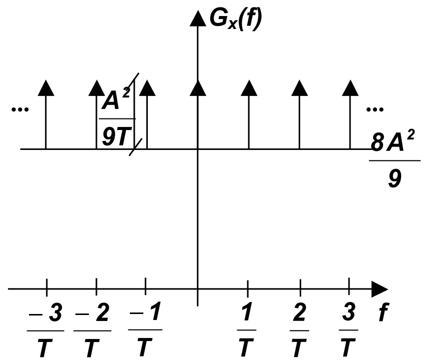
Para hallar la densidad espectral de potencia de X_t, escribimos la autocorrelación en la forma:

$$R_X[n] = A^2(1-(2p_b-1)^2)\delta[n] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A^2(2p_b-1)^2\delta[n-k]$$

Aplicando la transformada de Fourier a esta igualdad y luego utilizando la Fórmula de Poisson, se obtiene la densidad espectral de potencia $S_X(f)$:

$$S_X(f) = A^2(1-(2p_b-1)^2) + A^2(2p_b-1)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-k/T)$$

Su forma se muestra en la siguiente figura.



(b)

$$Y_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k p(t-kT-t_d)$$

Como Y_t es una señal PAM, se sabe que su densidad espectral de potencia es de la forma:

$$S_Y(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k)e^{-j2\pi fkT}$$

Aplicando los resultados de la parte anterior y utilizando la Fórmula de Poisson tenemos que:

$$S_Y(f) = \frac{\sigma_x^2|P(f)|^2}{T} + \frac{m_x^2}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Calculamos la varianza de X:

$$\sigma_X^2 = R_X[0] - m_X^2 = A^2(1 - (2p_b - 1)^2)$$

Entonces:

$$S_Y(f) = \frac{A^2(1 - (2p_b - 1)^2)|P(f)|^2}{T} + \frac{A^2(2p_b - 1)^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| P\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

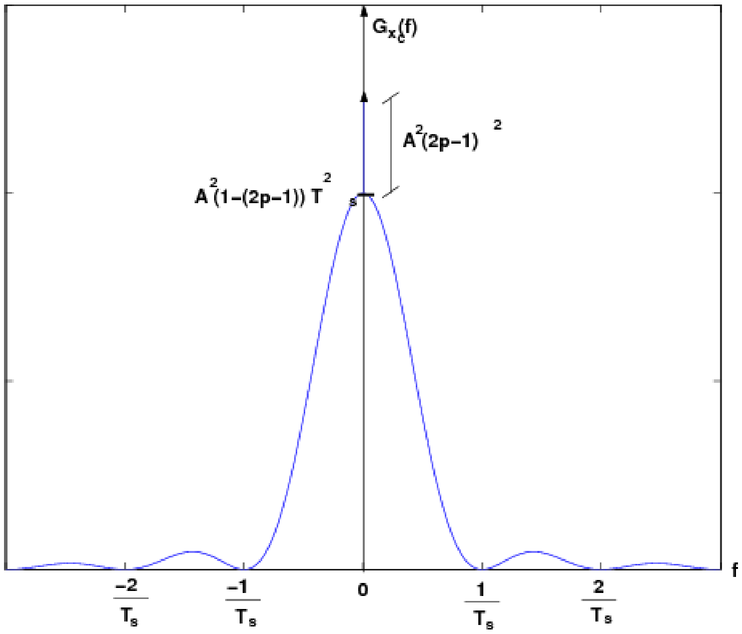
(c) Sabemos que:

$$|P(f)|^2 = T^2 sinc^2(fT)$$

De la forma de $|P(f)|^2$ se desprende que $|P(k/T)|^2 = T^2$ si $k = 0$, y $|P(k/T)|^2 = 0$ en otro caso (considerando k entero). Por lo tanto, la densidad espectral de potencia de la señal conformada queda:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= \frac{A^2(1 - (2p - 1)^2)}{T} T^2 sinc^2(fT) + \frac{A^2(2p - 1)^2}{T^2} T^2 \delta(f) \\ &= A^2(1 - (2p - 1)^2) T sinc^2(fT) + A^2(2p - 1)^2 \delta(f) \end{aligned}$$

Esta función tiene la forma:



El valor de p afecta a los valores de m_x y σ_x. Específicamente, si $p = 1/2$, entonces $m_x = 0$ y no se tiene una delta en $f = 0$ en el espectro. Esto es deseable ya que permite ahorrar potencia de transmisión, que antes era emitida pero no aprovechada. Con este valor de p, $G_{x_c}(f) = A^2 T sinc^2(fT)$.
Para el caso de $p = o$ o $p = 1$, el espectro nos queda solo formado por las deltas.

Problema 3

(a)

$$Y_t = g(t) * X_t + Z_t$$

con $g(t) = \delta(t) + \delta(t - \Delta_t)$. Por lo que

$$S_Y(f) = |G(f)|^2 S_X(f) + S_Z(f) = |1 + e^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 S_X(f) + \eta/2$$

(b)

$$R_{XY}(\tau) = E[X_{t+\tau}Y_t] = E[X_{t+\tau}(X_t + X_{t-\Delta_t} + Z_t)] = E[X_{t+\tau}X_t] + E[X_{t+\tau}X_{t-\Delta_t}] + E[Z_t X_{t+\tau}]$$

Como Z_t es independiente de X_t y de media nula, entonces el último término en la ec. anterior es nulo, por lo que

$$R_{XY}(\tau) = E[X_{t+\tau}X_t] + E[X_{t+\tau}X_{t-\Delta_t}] = R_X(\tau) + R_X(\tau + \Delta_t) = (\delta(t) + \delta(t + \Delta_t)) * R_X(\tau)$$

y finalmente

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}(R_{XY}(\tau)) = (1 + e^{j2\pi\Delta_t f})S_X(f)$$

(c) El estimador óptimo es el que se obtiene al aplicar el filtro de Wiener a Y_t,

$$\hat{X}_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)Y_{t-s}ds$$

con

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{(1 + e^{j2\pi\Delta_t f})S_X(f)}{|1 + e^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 S_X(f) + \eta/2}$$

(d) La respuesta en grecuencia del filtro podemos escribirla como

$$\mathcal{F}(h(t)) = H(f) = \frac{S_{XY}(f)}{S_Y(f)} = \frac{(1 + e^{j2\pi\Delta_t f})}{|1 + e^{-j2\pi\Delta_t f}|^2 + \frac{\eta}{2S_X(f)}}$$

A partir de esta expresión se observa que la respuesta en frecuancia del filtro se atenúa donde el ruido predomina respecto a la señal ($\eta \gg S_X(f)$) y se amplifica cuando la señal predomina respecto al ruido ($\eta \ll S_X(f)$)