Teoría de Lenguajes

Soluciones
1er. Parcial – Curso 2024

Ejercicio 1.- [Evaluación individual del obligatorio]

a) Se muestran estas posibles respuestas a modo de guía porque puede variar entre una solución y otra.

i) Se utilizó la función *sub* del módulo ***re*** de Python que se encarga de buscar coincidencias en un texto dada una cierta expresión regular e intercambiar esa coincidencia por otro texto. También se utilizó *backreferences* para referenciar parte del texto coincidente. Por ejemplo, para sustituir los tachados a <s></s> se utilizó: texto = re.sub(r'~~(.*?)~~', r'<s>\1</s>', texto)

ii) Se utilizó la función *findall* del módulo ***re*** de Python que se encarga de buscar coincidencias en un texto dada una cierta expresión regular y devuelve un arreglo con las coincidencias. En Python: menciones = re.findall(r'@(\w+)', texto)

b) **r'**(.*?)**'**

Ejercicio 2.-

a) Primero hacemos el pasaje AFND-eps a AFND

$\varepsilon_{cl}(q_0) = \{q_0,q_2,q_3,q_4\}$
$\varepsilon_{cl}(q_1) = \{q_1\}$
$\varepsilon_{cl}(q_2) = \{q_2,q_3,q_4\}$
$\varepsilon_{cl}(q_3) = \{q_3,q_4\}$
$\varepsilon_{cl}(q_4) = \{q_4\}$

$\delta'(q_0,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_0),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_0,q_2,q_3,q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{q_1,q_3\}) = \{q_1,q_3,q_4\}$
$\delta'(q_0,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_0),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_0,q_2,q_3,q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_1,q_2,q_3,q_4\}) = \{q_1,q_2,q_3,q_4\}$
$\delta'(q_1,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_1),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_1\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{q_0\}) = \{q_0,q_2,q_3,q_4\}$
$\delta'(q_1,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_1),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_1\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_2,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_2),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_2,q_3,q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{q_3\}) = \{q_3,q_4\}$
$\delta'(q_2,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_2),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_2,q_3,q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_3,q_4\}) = \{q_3,q_4\}$
$\delta'(q_3,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_3),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_3,q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_3,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_3),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_3,q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_3,q_4\}) = \{q_3,q_4\}$
$\delta'(q_4,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_4),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_4,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_4),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_3,q_4\}) = \{q_3,q_4\}$

entonces $F'=\{q_0,q_4\}$ y δ' dada por:

δ'	**a**	**b**
$\mathbf{q_0}$	$\{q_1,q_3,q_4\}$	$\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$
$\mathbf{q_1}$	$\{q_0,q_2,q_3,q_4\}$	$\{\}$
$\mathbf{q_2}$	$\{q_3,q_4\}$	$\{q_3,q_4\}$
$\mathbf{q_3}$	$\{\}$	$\{q_3,q_4\}$
$\mathbf{q_4}$	$\{\}$	$\{q_3,q_4\}$

Ahora hacemos el pasaje AFND a AFD

δ''	**a**	**b**
[q_0]	[$q_1q_3q_4$]	[$q_1q_2q_3q_4$]
[$q_1q_3q_4$]	[$q_0q_2q_3q_4$]	[q_3q_4]
[$q_1q_2q_3q_4$]	[$q_0q_2q_3q_4$]	[q_3q_4]
[$q_0q_2q_3q_4$]	[$q_1q_3q_4$]	[$q_1q_2q_3q_4$]
[q_3q_4]	[]	[q_3q_4]

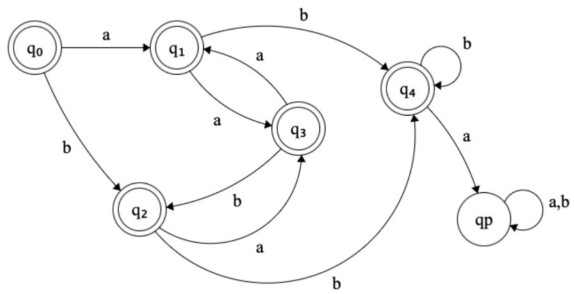
Con F = {q_0, q_{134}, q_{1234}, q_{0234}, q_{34}}

b) Dado un AFD M:(Q,Σ,δ,q_0,F) y dos tiras x,y $\in \Sigma^*$ se dice que
x R_M y <=> $\hat{\delta}(q_0,x) = \hat{\delta}(q_0,y)$

c) Como el autómata resultado tienen 5 estado pero NO está completo, es necesario completarlo, ya que la relación RM es sobre Σ^*

Primero renombramos los estados y completamos el autómata

δ''	**a**	**b**
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_4
q_2	q_3	q_4
q_3	q_1	q_2
q_4	q_p	q_4
q_p	q_p	q_p

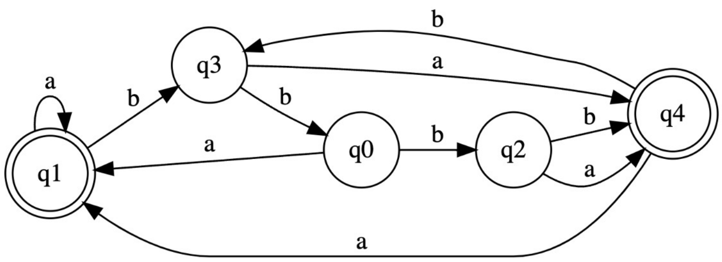


Ahora, como el AFD es completo, hay 6 clases de equivalencia ya que el AFD tiene 6 estados y R_M es una partición de clases sobre Σ^* como decíamos más arriba.

Ejercicio 3.-

a) Para responder a esta pregunta, lo primero será minimizar el AFD M_3 .

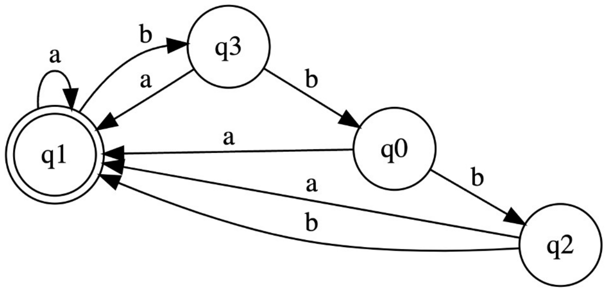
Este es el dibujo del autómata dado



Como ya es determinista, lo primero que debemos hacer es minimizar el autómata:

п0 [q0 q2 q3] [q1 q4]
п1 [q0 q3] [q2] [q1 q4]
п2 [q0] [q2] [q3] [q1 q4]
п3 [q0] [q2] [q3] [q1 q4]

El autómata mínimo es entonces:



Ahora usamos el método de clases de equivalencia para hallar las expresiones regulares asociadas. Planteamos el sistema de ecuaciones basándonos en las transiciones entrantes de cada estado:

$X_0 = \varepsilon \mid X_3b$
$X_1 = X_1a \mid X_3a \mid X_0a \mid X_2a \mid X_2b$
$X_2 = X_0b$
$X_3 = X_1b$

Sustituyendo X_3, X_2 las ecuaciones quedan:

$X_0 = \varepsilon \mid X_1bb$
$X_1 = X_1a \mid X_1ba \mid X_0a \mid X_0ba \mid X_0bb = X_1(a \mid ba) \mid X_0(a \mid ba \mid bb)$
$X_2 = X_0b$
$X_3 = X_1b$

como queremos usar el Lema de Arden en su versión $X = X.r \mid s$ $X = s.r^*$, entonces ⇒ intentamos sustituir hasta que X_2 esté escrita en términos de ella misma.

$X_1 = X_1(a \mid ba) \mid X_0(a \mid ba \mid bb) \Rightarrow X_1 = X_0(a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*$

Sustituyendo en X_0 y aplicando el lema de arden nuevamente:

$X_0 = \varepsilon \mid X_0(a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb = ((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*$

Resultando:
$X_0 = ((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*$
$X_1 = ((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*(a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*$
$X_2 = ((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*bb^*$
$X_3 = ((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*(a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*b$

Como el autómata es mínimo y completo, entonces por el corolario del Teorema de Myhill Nerode, las clases de equivalencia de R_M y las de R_L coinciden.

Finalmente, la expresión X_1 es la que define las tiras del lenguaje aceptado por el autómata, ya que es la asociada al único estado final.

Entonces $L(M) = L(((a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*bb)^*(a \mid ba \mid bb)(a \mid ba)^*)$

Ejercicio 4.-

Para cada uno de los siguientes lenguajes decir si son o no regulares. Justifique en cada caso.

a) $L_a = \{ \#a^j\#a^k \;\; \text{con } k\geq 0 \text{ , } j \text{ MOD } 2 = 0 \text{ , } j>0 \}$

L_a es Regular
Alcanza con mostrar como se puede armar una expresión regular que contemple las restricciones de cada cantidad de **a**'s entre los **#**.
Entre los **#** debe haber una cantidad par de **a**'s >0: **aa(aa)***
Luego del segundo **#**, cualquier cantidad de **a**'s (inclusive ninguna): **a***

De donde una posible ER es: **#aa(aa)*#a***

b) $L_b = L_a \cap \{ \#a^t\# \;\; \text{con } t \geq 0\}$
L_b es Regular
Nuevamente, se puede encontrar una ER para $\{ \#a^t\# \;\; \text{con } t \geq 0\}$, **#a*#**
Los lenguajes regulares son cerrados bajo la operación de $\cap$, y como L_a era Regular, L_b es Regular.

c) $L_c = \{ \#a^j\#a^k \;\; \text{con } j>k\geq 0 \text{ , } j \text{ MOD } 2 = 0 \}$

L_c NO es Regular.
Se probará utilizando el contrarrecíproco del Pumping Lemma.
Sea N la constante del PL, consideramos la tira $z = \#a^{2N}\#a^{2N-1} \in L_c$ y $|z| = 4N+1 \geq N$
Se consideran todas las descomposiciones z = uvw que cumplen: $|v|>0$ y $|uv|\leq N$.
Se va a mostrar en todas ellas que $\exists$ i, para el que la tira $uv^iw \notin L_c$.

Caso 1:

$u = \varepsilon$
$v = \#a^q$ $\quad 1+q \leq N, \quad q\geq 0$
$w = a^{2N-q}\#a^{2N-1}$

$z_i = (\#a^q)^i a^{2N-q}\#a^{2N-1}$
Tomando i=0; $z_o = a^{2N-q}\#a^{2N-1}$ que $\notin L_c$ porque no comienza con el **#**

Caso 2:

$u = \#a^p$ $\quad p \geq 0$
$v = a^q$ $\quad q>0,\ 1+p+q \leq N$
$w = a^{2N-p-q}\#a^{2N-1}$

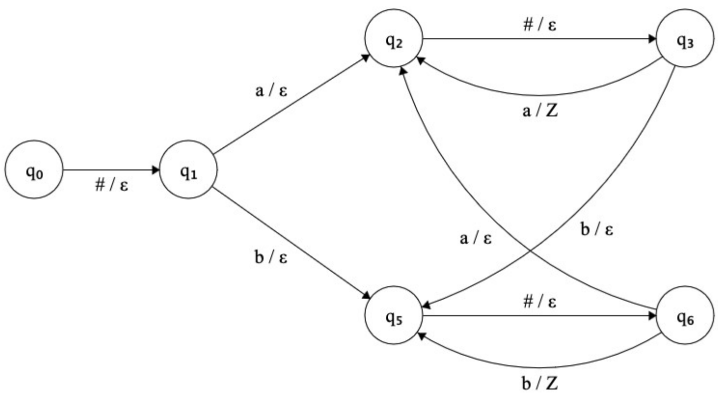
$z_i = \#a^p(a^q)^i a^{2N-p-q}\#a^{2N-1}$

Tomando $i=0$; $z_0 = \#a^{2N-q}\#a^{2N-1}$ que $\notin L_c$ porque como $q>0$, $2N-q \leq 2N-1$ y z_0 tiene una cantidad menor de **a**'s entre los # que las **a**'s del final y por tanto no se cumple la condición $j>k$

Estas son las posibles descomposiciones de z que cumplen $|v|>0$ y $|uv|\leq N$
Entonces por el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes regulares se puede afirmar que L_c NO es Regular.

Ejercicio 5.-

a) $L_{5a} = \{ \#x_1\#x_2\#x_3\#\ldots x_{k-1}\#x_k \ /\ k\geq 1,\ \forall i \ /\ 0\leq i\leq k,\ x_i \in \{a,b\} \}$



b) $L_{5b} = \{ <0^p\#1^t,\ 1^r0^k1^j\#> \text{ con } p=r+k \geq 0,\ j\geq 0,\ t\geq 0 \}$