Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1

a) Indique si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas justificando adecuadamente en cada caso.

i) Si L_{a1} no es regular pero $L_{a1} \cup L_{a2}$ si es regular, entonces L_{a2} no es regular.
Falso.
Sea $L_{a1} = \{0^k1^k / k\geq 0\}$ lenguaje libre de contexto no regular y $L_{a2} = \{0^*1^*\}$ lenguaje regular.
Sin embargo, $L_{a1} \cup L_{a2} = \{0^*1^*\}$ que es un lenguaje regular.

ii) El lenguaje $L_{ii} = \{ 0^p\ 1^q\ 0^t / p>0, q \text{ MOD } 3 = 0, t \in \{0,1\} \}$ es libre de contexto no regular
Falso.
L_{ii} es regular ya que la siguiente expresión regular lo genera: $00^*(111)^*(0|\varepsilon)$

iii) La cardinalidad de todo lenguaje recursivamente enumerable es infinito.
Falso.
El lenguaje $L=\{\varepsilon\}$ es regular (generado por la gramática regular $S\rightarrow \varepsilon$) y por Jerarquía de Chomsky es LLC y LRE. Sin embargo, la cardinalidad de L es finita (contiene un solo elemento que es la tira vacía).

b) Construya una gramática simplificada G_b / $L_{ii} = L(G_b)$, siendo L_{ii} el lenguaje L_{ii} de la parte anterior. La gramática construida debe corresponderse al tipo de gramática adecuada según la Jerarquía de Chomsky.

La siguiente gramática lineal derecha genera el lenguaje regular L_{ii} :
$S\rightarrow 0S \mid 0P$
$P \rightarrow 111P \mid 0 \mid \varepsilon$

La gramática no está simplificada ya que tiene una producción épsilon. Procedemos a aplicar el algoritmo de simplificación.

Eliminación de producciones épsilon:

$S\rightarrow 0S \mid 0P \mid 0$
$P \rightarrow 111P \mid 0 \mid \cancel{\varepsilon} \mid 111$

No tiene producciones unitarias.

Obtención de variables positivas:
$POS_1=\{S,P\}$
Obtención de variables alcanzables:
$ALC_1=\{S\}$, $ALC_2=\{S,P\}$

Por lo tanto, tenemos una gramática derecha simplificada:
$S\rightarrow 0S \mid 0P \mid 0$
$P \rightarrow 111P \mid 0 \mid 111$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 2

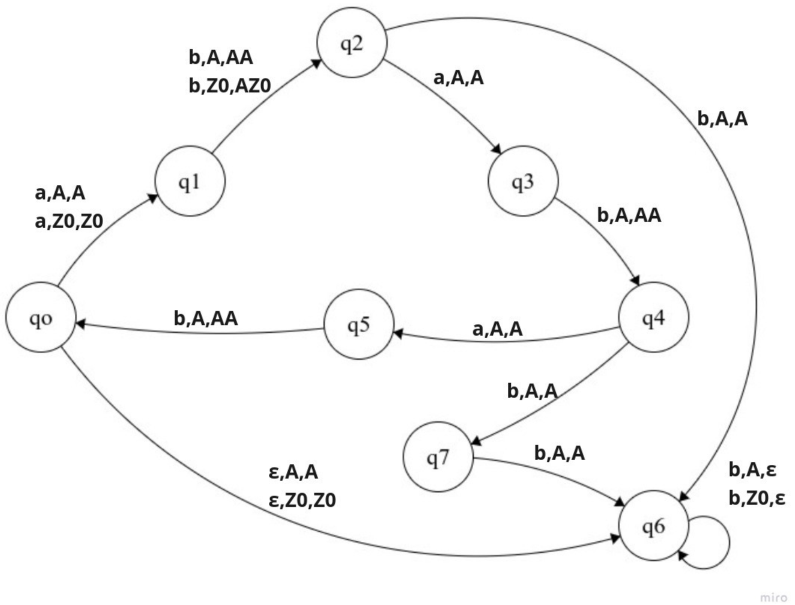
Sea $L_2 = \{ (ab)^k b^{\,j+k+1} \;/\; j = k \text{ MOD } 3 ,\; k \geq 0 \}$

a) Defina Autómata Push-Down Determinista.

Dado $M : (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- $\forall q \in Q \ y \ Z \in \Gamma : \ si \ \delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in \Sigma, \ \delta(q, a, Z) = \emptyset$
- $\forall \ q \in Q, \ Z \in \Gamma \ y \ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \ / \ \#(\delta(q, a, Z)) \leqslant 1$

b) Se Construya un Autómata Push-Down M_2 tal que $L_2 = L(M_2)$.



El autómata construido en la parte anterior es NO determinista.
Alcanza con ver que existen por ejemplo las transiciones $\delta(q_0,a,A)$ y $\delta(q_0,\varepsilon,A)$.

c) Construya una Gramática Libre de Contexto simplificada G_2 / $L_2 = L(G_2)$. Justifique su razonamiento.

El lenguaje es libre de contexto, ya que se construyó en la parte b) un APD, con lo cual se construirá una GLC que lo genere.
Una posible gramática es la siguiente, la cual tiene como símbolo inicial S

$S \rightarrow abUb \mid b$
$U \rightarrow abDb \mid bb$
$D \rightarrow abSb \mid bbb$

Se puede ver que esa gramática construida ya está simplificada, pues no tiene símbolos inútiles, ni producciones épsilon ni producciones unitarias.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

d) Demuestre formalmente que el lenguaje L_2 es un lenguaje libre de contexto pero no regular.

El lenguaje L_2 el libre de contexto pero NO es regular. Se demuestra utilizando el contrarecíproco del Pumping Lema para Lenguajes Regulares.

Sea N la cte. del PL y tomamos $z = (ab)^{3N}b^{3N+1}$ (tomamos k=3N de forma que j=0) $z \in L_2$ con $|z| = 9N+1 \geq N$. Se estudian todas las descomposiciones de z=uvw que cumplen: $|v|>0$ y $|uv| \leq N$

Familia 1:

$u = (ab)^p$ $p \geq 0$ $|2p+2q| \leq N$
$v = (ab)^q$ $q>0$
$w = (ab)^{3N-p-q}\, b^{3N+1}$

$z_i = (ab)^{3N-q}\,(ab)^{iq}\, b^{3N+1} = (ab)^{3N+(i-1)q}\, b^{3N+1}$
Tomando i=4, $z_4 = (ab)^{3N-3q}\, b^{3N+1}$ donde, como j seguiría siendo 0 (j = k MOD 3), la cantidad de pares de **ab**'s es menor o igual que la cantidad de **b**'s + 1 que permanece fija, con lo cual $z_4 \notin L_2$

Familia 2:

$u = (ab)^p$ $p \geq 0$ $|2p+2q+1| \leq N$
$v = (ab)^q\, a$ $q \geq 0$
$w = b(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$

$z_i = (ab)^p\,((ab)^q a)^i\, b\,(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$
Tomando i=0, $z_0 = (ab)^p\, b\,(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$ en donde:
- si p=0, z_0 comienza en **b**
- si p>0, z_0 contiene dos **b**'s seguidas en medio de la secuencia de pares de **ab**'s

En cualquier caso $z_0 \notin L_2$

Familia 3:

$u = (ab)^p\, a$ $p \geq 0$ $|2p+2q+2| \leq N$
$v = b(ab)^q$ $q \geq 0$
$w = (ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$

$z_i = (ab)^p\, a(b(ab)^q)^i\,(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$
Tomando i=0, $z_0 = (ab)^p\, a\,(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$ en donde:
- si p=0, z_0 comienza con dos **a's** seguidas
- si p>0, z_0 contiene dos **a**'s seguidas en medio de la secuencia de pares de **ab**'s

En cualquier caso $z_0 \notin L_2$

Familia 4:

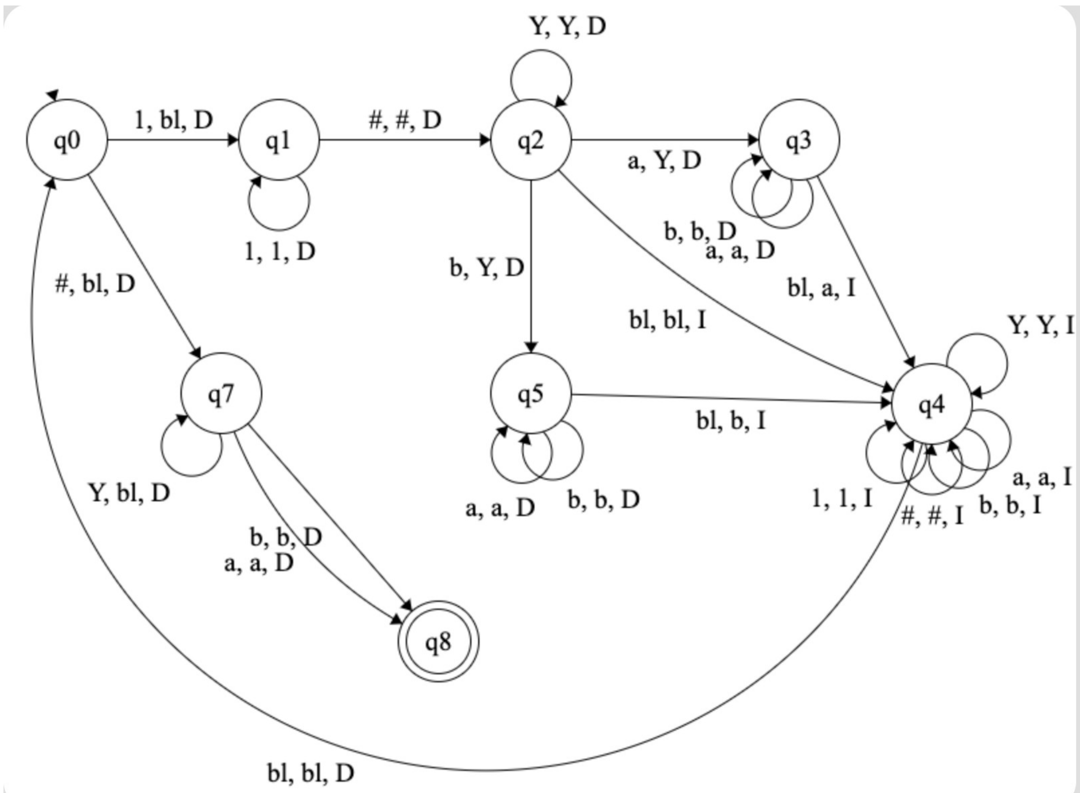
$u = (ab)^p\, a$ $p \geq 0$ $|2p+2q+3| \leq N$
$v = b(ab)^q a$ $q \geq 0$
$w = b(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$

$z_i = (ab)^p\, a(b(ab)^q a)^i\, b(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1}$
Tomando i=0, $z_0 = (ab)^p\, ab\,(ab)^{3N-p-q-1}\, b^{3N+1} = (ab)^{3N-q}\, b^{3N+1}$
Como $q \geq 0$, podría ser que fuera múltiplo de 3 o no. Pero en cualquier caso, la cantidad de pares de **ab**'s es menor que la cantidad de **b**'s + 1 que permanece fija, con lo cual $z_4 \notin L_2$

Estas son todas las descomposiciones que cumplen |v|>0 y |uv|≤ N, y para todas ellas se encontró un i donde $z_i \notin L_2$, con lo cual **L_2 NO es Regular.**

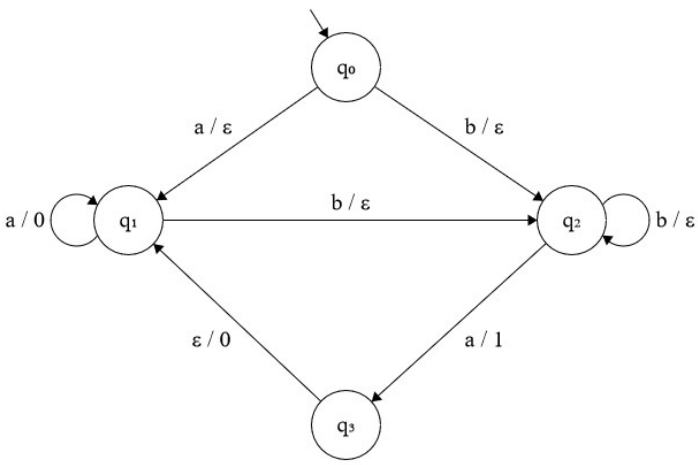
<u>Observación:</u> Notar que tanto la Familia 2 como la Familia 3 contempla cuando el subtring v contiene un sólo símbolo (**a** o **b** según el caso), que sucede cuando q=0.
En cualquiera de ellos, el argumento sigue siendo el mismo cuando i=0.

Ejercicio 3



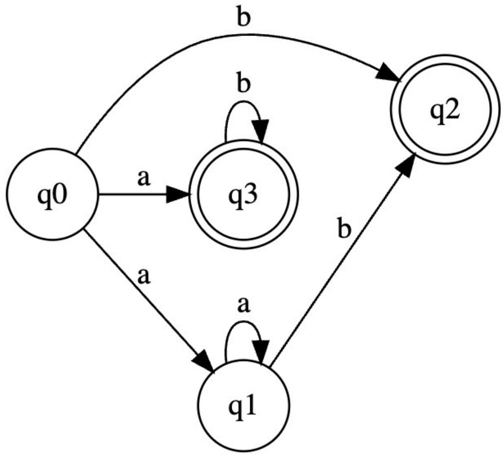
Ejercicio 4

a)



b) Para hallar las clases de RL calcularemos las clases de RM. Para eso, pasaremos el automata de AFND a AFD y luego lo minimizaremos para hallar las clases de equivalencia.

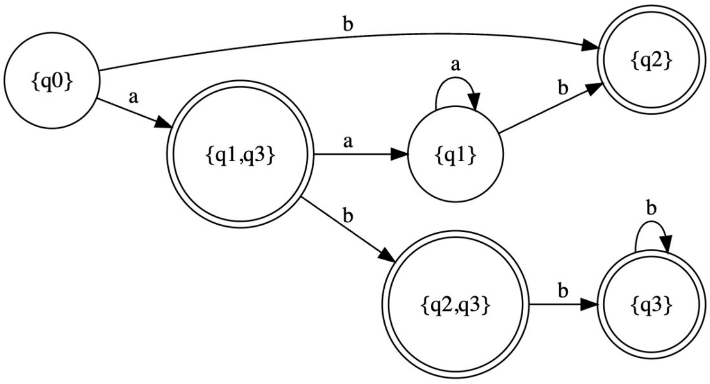
Autómata original:



Luego haremos la tabla de transiciones de los superestados para pasara un AFD

	a	b
[q_0]	[q_1q_3	[q_2]
[q_1q_3]	[q_1	[q_2q_3]
[q_2]		
[q_1]	[q_1	[q_2]
[q_2q_3]		[q_3]
[q_3]		[q_3]

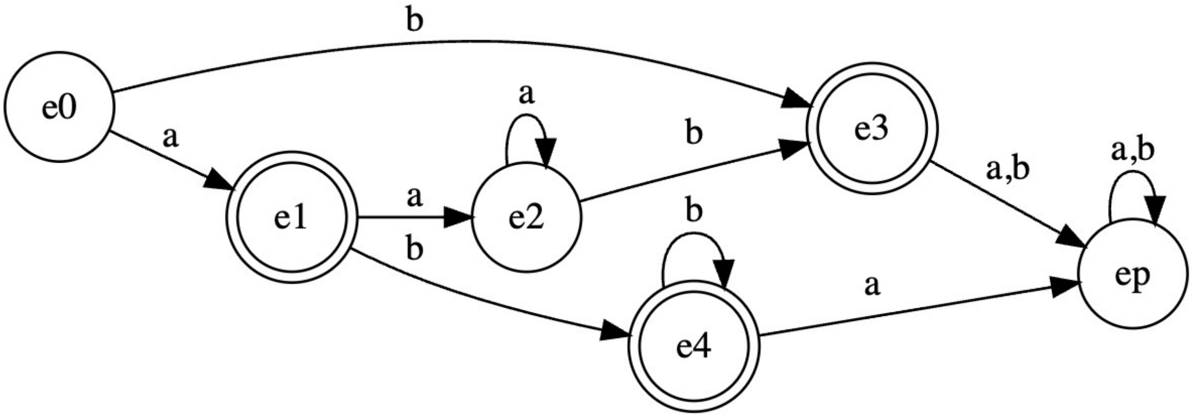
Por lo que obtenemos el siguiente autómata:



Y ahora aplicaremos el algoritmo de minimización

Π_0: {q_0, q_1,q_p}, {q_1q_3,q_2q_3,q_3,q_2}
Π_1: {q_0}, {q_1},{q_p}, {q_1q_3,q_2q_3,q_3,q_2}
Π_2: {q_0}, {q_1},{q_p}, {q_1q_3},{q_2q_3,q_3,q_2}
Π_3: {q_0}, {q_1},{q_p}, {q_1q_3},{q_2q_3,q_3},{q_2}

Resultando en el autómata de la imagen debajo luego de minimizar y renombrar, siendo e0 el estado inicial.



Por lo tanto, como el autómata era mínimo, entonces las clases calculadas de R_M coinciden con las de R_L y existen 6 clases de equivalencia.

c) Construya un Autómata Finito Determinista de 2 cintas que acepte el siguiente lenguaje:

$L_c = \{ <0^k1^t, 0^j(aa)^t> \text{ con } k,t > 0, j \geq 0 \}$