

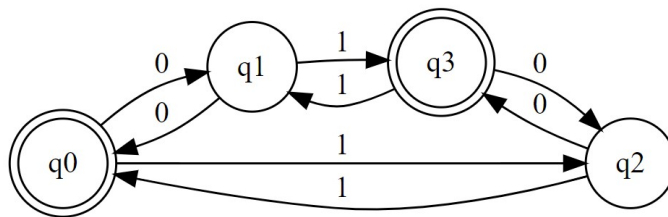
Teoría de Lenguajes (Soluciones)

Consideraciones generales

- i) Escriba nombre y C.I. en todas las hojas.
- ii) Numere todas las hojas.
- iii) En la primera hoja indique el total de hojas.
- iv) Comience cada ejercicio en una hoja nueva.
- v) Utilice las hojas de un solo lado.
- vi) Entregue los ejercicios en orden.

Ejercicio 1

a) **Falso.** Depende del autómata que se construya. A continuación se muestra un autómata que no verifica lo expuesto en la afirmación:



donde se observa que $\delta^*(q_0, 0011) = q_0$ y $\delta^*(q_0, 01) = q_3$

b) **Verdadero.** A continuación se construye una gramática regular. Luego se verificará que esté simplificada y en caso de no estarlo, se aplica el algoritmo de simplificación.

$$L_{1b} = \{ 0^p 2^{2k} 0^j \mid \text{si } p \bmod 3 = 2 \text{ entonces } k > 0, j \geq 0 \text{ y si } p \bmod 3 = 0 \text{ o } 1 \text{ entonces } k \geq 0, j > 0 \}$$

Para pensarla, lo podemos hacer considerando las 2 condiciones por separado y luego unir el conjunto de reglas; a saber

$$\begin{array}{ll}
 S_1 \rightarrow 000S_1 \mid 00X & S_2 \rightarrow 000S_2 \mid 0Y \mid Y \\
 X \rightarrow 11X \mid 11R \mid 11 & Y \rightarrow 11Y \mid 11C \mid C \\
 R \rightarrow 0R \mid 0 & C \rightarrow 0C \mid 0
 \end{array}$$

Agregamos entonces $S \rightarrow S_1 \mid S_2$

Como la gramática formada por la unión de ambos conjuntos de reglas contienen producciones unitarias, se aplica el algoritmo que las elimina. Notar que No tiene producciones epsilon.

$$\begin{array}{l}
 S \rightarrow 000S_1 \mid 00X \mid 000S_2 \mid 0Y \mid 11Y \mid 11C \mid 0C \mid 0 \\
 S_1 \rightarrow 000S_1 \mid 00X \\
 S_2 \rightarrow 000S_2 \mid 0Y \mid 11Y \mid 11C \mid 0C \mid 0 \\
 X \rightarrow 11X \mid 11R \mid 11 \\
 Y \rightarrow 11Y \mid 11C \mid 0C \mid 0 \\
 R \rightarrow 0R \mid 0 \\
 C \rightarrow 0C \mid 0
 \end{array}$$

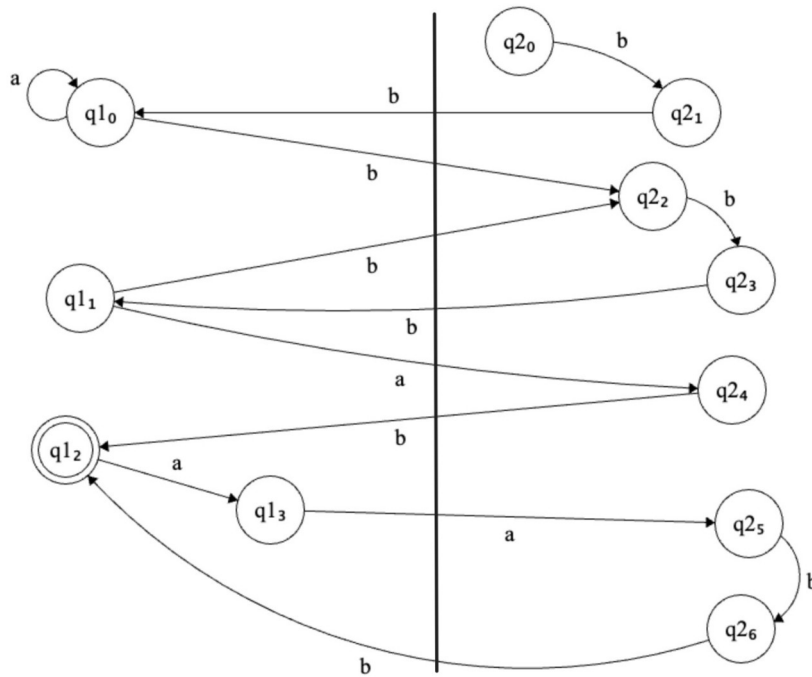
Todas las variables son útiles.

Notar que podría sustituirse la variable C por la variable R, ya que solo generan secuencias de 0's

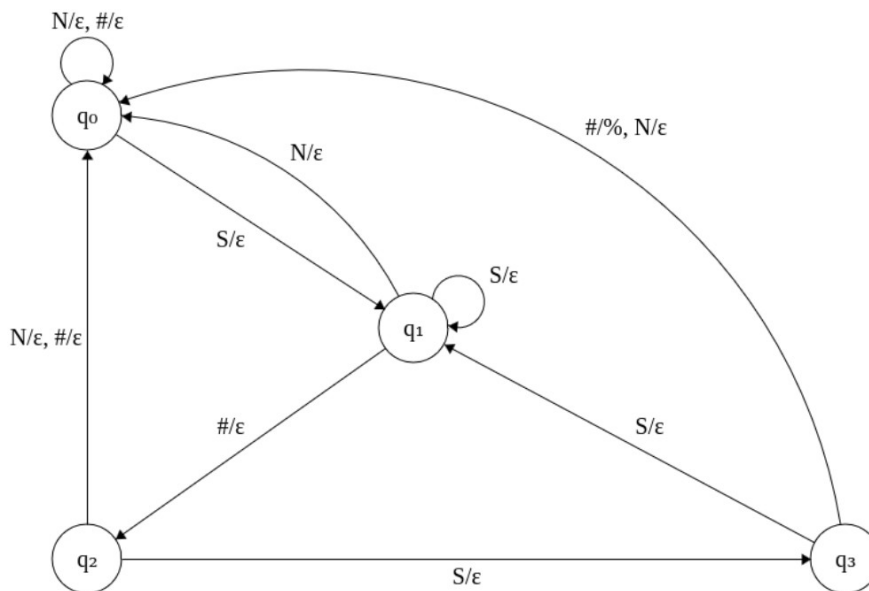
Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 2

a) $L_2 = \{ \langle a^p b^{k-1} a^t, b^{2k+t} \rangle : \text{con } p \geq 0, k > 1, t \geq 1 \text{ impar} \}$



b)



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 3

Sea el lenguaje $L_3 = \{ a^n b^k \mid k = 2^n, n \geq 0 \}$

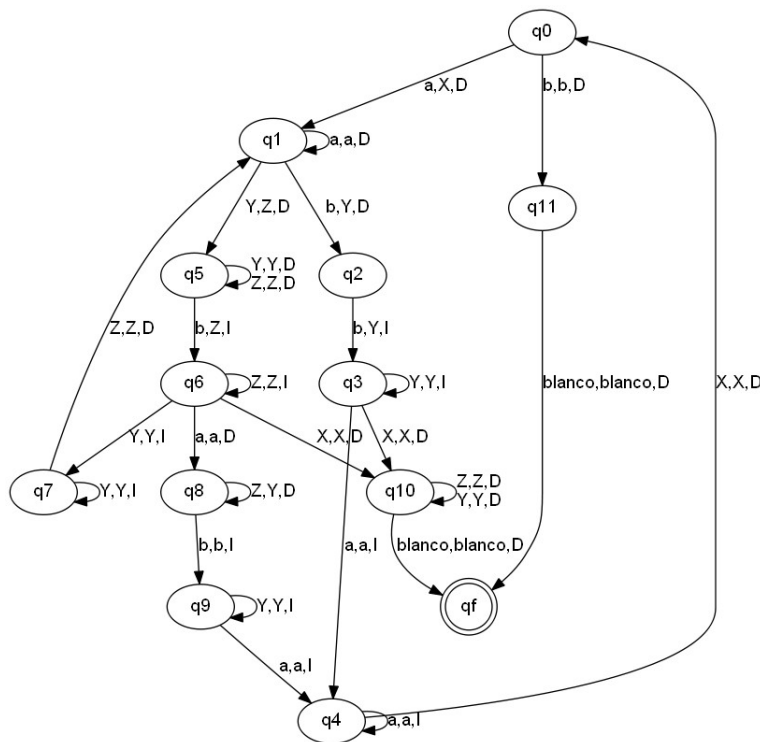
a) Construya un autómata $M_3 / L_3 = L(M_3)$.

Es un lenguaje recursivamente enumerable (no se prueba y no se pide probarlo).

Se construye por lo tanto una Máquina de Turing

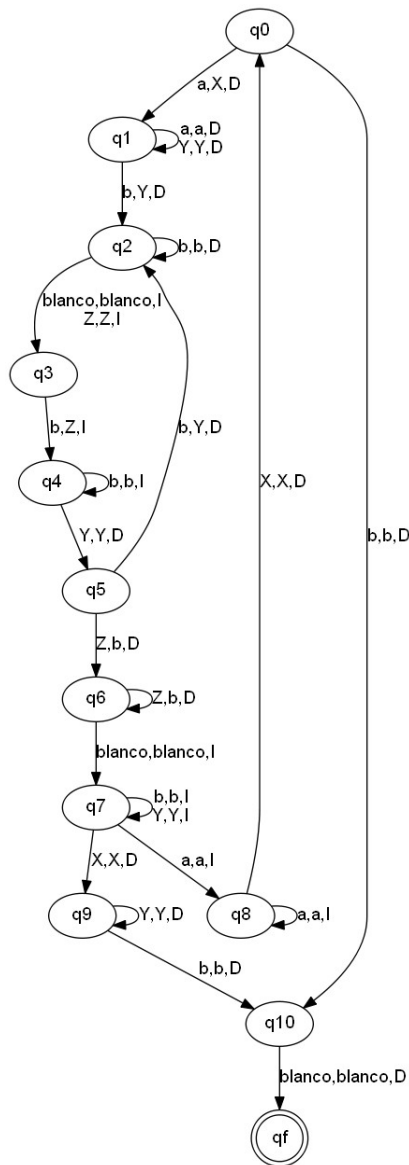
La idea de la MT es la siguiente:

- Si no hay a's, acepta si hay una única b.
- Para la primera a que encuentra, la marca y marca 2 b's.
- Para cada a subsiguiente, la marca y por cada b ya marcada se marca una b adicional.
- Si se terminan las a's, acepta si no quedan b's sin marcar.



Una MT alternativa para el lenguaje L_3 , se basa en la siguiente idea:

- Si no hay a's, acepta si hay una única b.
- Para cada a que encuentra, la marca y marca la mitad de las b's restantes que estén sin marcar.
- Si se terminan las a's, acepta si queda únicamente una b sin marcar.



b) Construya una gramática $G_3 / L_3 = L(G_3)$.

$S \rightarrow SA \mid Ib$
 $bA \rightarrow Abb$
 $IA \rightarrow aI$
 $Ib \rightarrow b$

Ejercicio 4

Sea $L_4 = \{ 0^j 1^k a^p b^t \mid j \geq 1; k \geq 0; p > k+t \geq 1; t \text{ par} \}$

- Clasifique L_4 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.
- Construya un autómata M_4 tal que $L_4 = L(M_4)$. ¿Es determinista? Justifique.
- Construya una gramática $G_4 / L_4 = L(G_4)$. Si es posible, dé una gramática simplificada. Justifique su razonamiento.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

a) El lenguaje es libre de contexto y no regular. Se probará que no es regular utilizando el contrarrecíproco del *pumping lema* para lenguajes regulares y luego en la parte b) se probará que es libre de contexto dando un autómata push down que lo reconozca.

Consideremos N la cte del PL y sea la tira $z = 01^N a^{N+1}$ de donde $|z| = 2N+2 \geq N$
($k=N$ $t=0$ $j=1$ $p = N+1$)

Familia 1

$$\begin{aligned} u &= \epsilon & p+1 &\leq N \\ v &= 01^p & p &\geq 0 \\ w &= 1^{N-p} a^{N+1} \end{aligned}$$

$$z_i = (01^p)^i 1^{N-p} a^{N+1}$$

Tomando $i=0$ se obtiene: $z_0 = (01^p)^0 1^{N-p} a^{N+1} = 1^{N-p} a^{N+1}$, que provoca la eliminación del 0 y las tiras deben comenzar por 0's ($j \geq 1$). Entonces $z_0 \notin L_4$

Familia 2

$$\begin{aligned} u &= 01^p & 1+p+q &\leq N \\ v &= 1^q & q &\geq 1 \\ w &= 1^{N-(p+q)} a^{N+1} \end{aligned}$$

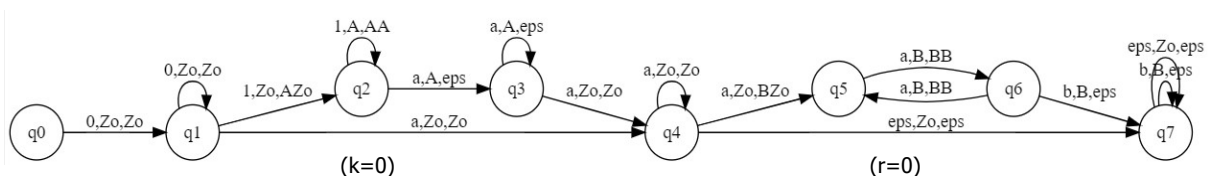
$$z_i = 01^p 1^{q \cdot i} 1^{N-(p+q)} a^{N+1} = 01^{N+q(i-1)} a^{N+1}$$

Tomando $i=3$ se tiene: $z_3 = 01^{N+2q} a^{N+1}$

Se sabe que $q \geq 1$ entonces $N+2q \geq N+2 > N+1$, esto significa que la cantidad de 1's (k) es mayor que la cantidad de a's (p). Por lo tanto, $z_3 \notin L_4$

Estas son todas las descomposiciones posibles para la tira $z = 01^N a^{N+1}$ que cumplen $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$, entonces por el contrarrecíproco del Pumping Lema se concluye que el lenguaje L_4 **no es regular**.

b) Se construye un APD



El APD es No determinista, ya que existe por ejemplo $\delta(q_4, a, Z_0) = \{ (q_4, Z_0), (q_5, BZ_0) \}$
Además podemos decir que acepta por stack vacío

c) Se construye una GLC con las siguientes reglas de producción:

- $S \rightarrow 0S \mid 0X$
- $X \rightarrow AB \mid BC \mid ABC$
- $A \rightarrow 1Aa \mid 1a$
- $B \rightarrow aB \mid a$
- $C \rightarrow aaCbb \mid aabb$

La gramática construida ya está simplificada debido a que no tiene producciones- ϵ ni producciones unitarias y todas sus variables son útiles.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.