Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta.

a) Si L_a es NO regular y L_a U L_b es regular, entonces L_b no es finito
b) Sean L_c y L_d lenguajes tales que L_c es libre de contexto no regular y L_d es regular. Entonces $(L_c \,.\, L_d)^r$ es libre de contexto no regular
c) Sean Σ, Δ alfabetos, $L_e \subseteq \Sigma^*$ y $h:\Sigma \to \Delta$ un homomorfismo. Se cumple que si $h(L_e)$ es regular, entonces L_e es regular.
d) El lenguaje L_f = { x / x es de la forma $010^k1^j(01)^{k+j}$: k,j≥0 } es regular

Solución:

a) VERDADERO.
Supongamos por absurdo que L_b es finito.
Sea $L' = L_a \cup L_b$; de donde podemos escribir a L_a de la siguiente forma:
$L_a = (L_b^c \cap L') \cup (L_a \cap L_b)$ y por propiedades de lenguajes regulares tenemos que:
- L_b es regular (porque lo supongo finito),
- L' es regular (unión de regulares),
- el complemento de un regular es regular (L_b^c)

Se llega a que L_a debe ser regular, con lo cual contradice nuestra hipótesis de que era NO regular. Entonces, L_b es NO finito.

b) FALSO.
Considerar L_c = { a^kb^p con $0 \le p \le k$ } y L_d está dado por b*.

Notar que $(L_c \,.\, L_d)^r = L_d^r \,.\, L_c^r$

L_c es Libre de Contexto y no Regular y L_d Regular.
L_d^r también es regular por propiedades de lenguajes regulares (de hecho, sería el mismo lenguaje dado por la ER b*)
También por propiedades, ahora de lenguajes libres de contexto, L_c^r es libre de contexto no regular, L_c^r = { b^pa^k con $0 \le p \le k$ } .

De donde se puede ver que $L_d^r \,.\, L_c^r$ = {b^q con $q \ge 0$}. { b^pa^k con $0 \le p \le k$ } el cual está dado por la ER **b*a***

c) FALSO.
Sean $\Sigma = \{a,b\}$, $\Delta = \{0\}$ y $L_e = \{a^nb^n \,/\, n \ge 0\}$ (que se sabe es Libre de Contexto no Regular)
Se considera el homomorfismo ***h*** tal que:

$$\boldsymbol{h}(a) = 0$$
$$\boldsymbol{h}(b) = 0$$

De donde $\boldsymbol{h}(L_e) = \{0^{2n} \,/\, n \ge 0\}$ el cual es Regular (es el lenguaje de las tiras con cantidad par de 0's), existe la ER (00)* y se tenía L_e que era Libre de Contexto no Regular.

d) FALSO.
Se probará por en contrarecíproco del PL para lenguajes regulares que L_f NO es Regular.

Sea N la cte del PL y $\mathbf{z = 010^N1(01)^{N+1}}$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Se observa que $|z| \geq N$
Analizamos las familias de descomposiciones de $z = uvw$ que cumplen: $|uv| \leq N$, $|v| \geq 1$

Familia 1:
$u = \varepsilon$
$v = 0$
$w = 10^N1(01)^{N+1}$

$z_i = 0^i10^N1(01)^{N+1}$
Tomando $i = 0$ $z_0 = 10^N1(01)^{N+1}$ de donde $z_0 \notin L_f$ porque no comienza con 0

Familia 2:
$u = \varepsilon$
$v = 010^p$ $p \geq 0$
$w = 0^{N-p}1(01)^{N+1}$

$z_i = (010^p)^i0^{N-p}1(01)^{N+1}$
Tomando $i = 2$, $z_2 = (010^p)(010^p)0^{N-p}1(01)^{N+1}$ de donde $z_2 \notin L_f$ porque independientemente del p, se rompe la estructura de la tira, al venir dos 01 seguidos antes de la secuencia de 0's

Familia 3:
$u = 0$
$v = 10^p$ $p \geq 0$
$w = 0^{N-p}1(01)^{N+1}$

$z_i = 0(10^p)^i\,0^{N-p}1(01)^{N+1}$
Tomando $i = 0$ $z_0 = 0^{N-p+1}1(01)^{N+1}$ de donde $z_0 \notin L_f$ porque
- si p=0, entonces no comienza con 01
- si p>0, entonces no se cumple la relación entre los pares (01) del final de la tira y la cantidad de 0's (N-p+1) + 1 (del 1 que viene después)

Familia 4:
$u = 010^p$ $p \geq 0$
$v = 0^q$ $q \geq 1$
$w = 0^{N-p-q}1(01)^{N+1}$

$z_i = 010^p0^{q*i}\,0^{N-p-q}1(01)^{N+1} = 01\,0^{N-p+(i-1)q}1(01)^{N+1}$
Tomando $i = 2$, $z_2 = 01\,0^{N-p+q}1(01)^{N+1}$ de donde $z_2 \notin L_f$ porque como $q \geq 1$ no se cumple la relación entre los pares (01) del final de la tira y la cantidad de 0's (N-p+q) + 1 (del 1 que viene después) como en la discusión de la familia anterior.

Como estas son las 3 familias de descomposiciones que cumplen $|uv| \leq N$, $|v| \geq 1$ y en cada una encontramos falla en encontrar un $i \in \aleph$ / $uv^iw \notin L$, entonces L_f NO Regular

Ejercicio 2

a) Construya un Autómata Finito Determinista de dos cintas que acepte la relación:
$\{<a^k b^{2t} a^j, b^l a^{t+1} b^{2j}> / j \geq 0;\ k \bmod 2 \neq 0;\ k,l,t > 0\}$

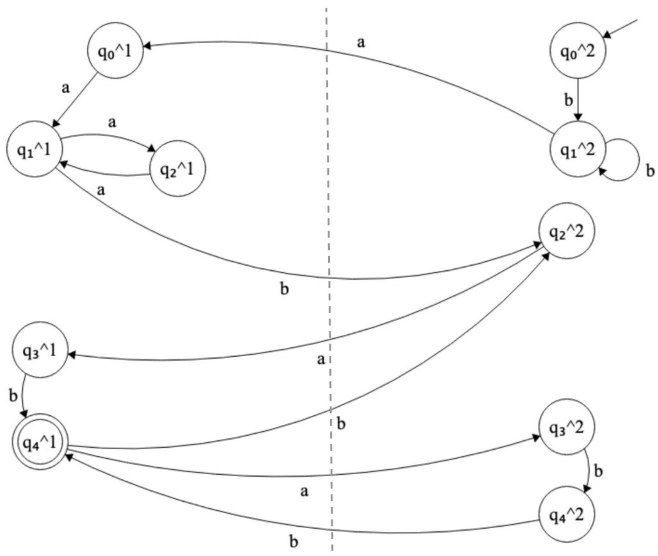
b) Construya una Máquina de Mealy $M_{2b}=(Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda,q_0)$ con:
$\Sigma=\{a,b\}$ y $\Delta=\{a,b,c\}$ λ: Q x $(\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow (\Delta \cup \{\varepsilon\})$ / lee una secuencia de elementos de Σ y se sustituye por una **c** cada símbolo **a** rodeado de dos símbolos **b** (sólo el inmediato anterior y el posterior).

Ejemplos:

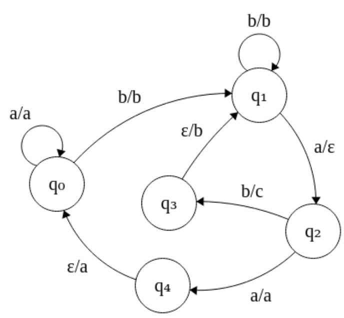
Entrada	Salida
b**a**b	b**c**b
abaabaabaab**a**b	abaabaabaab**c**b
aab**a**bbaa	aab**c**bbaa
ab**a**bbba	ab**c**bbba

Solución:

a)



b)



Ejercicio 3

Sean

L_{31}= { x / x es de la forma $a^{2n}b^k ab^{kn}$: k≥1, n≥1 }
L_{32}= { x / x es de la forma $a^n b^{2k} a^t$: k≥1, n≥1, t≥0 }

a) Construya gramáticas irrestrictas que generen los lenguajes L_{31}y L_{32} .
b) ¿Es posible construir una gramática libre de contexto para generar L_{32}? ¿Es posible construir una gramática regular para generar L_{32}? Si alguna de sus respuestas fue afirmativa, constrúyalas. Justifique sus respuestas.
c) Construya una MT M_{31} / L(M_{31}) = L_{31} .

Solución:

a) Se construye una Gramática Irrestricta para ambos lenguajes:

Para L_{31}

S → I A F
A → aaNA | aaNB
B → bKB | bK

Los símbolos N se mueven hacia la derecha de la tira multiplicando a los símbolos K, que quedan sin moverse hasta que la marca I las borre.

Na → aN
Nb → bN
NK → KXN
NF → F

Los símbolos X son los que se transforman en b's al pasar la marca F, por lo que pueden ir libremente hacia la derecha.

Xa → aX
Xb → bX
XK → KX
XN → NX
XF → Fb

Una vez que la marca I y la marca F se encuentran, generan el símbolo "a" que separa a b^k y b^{kn}

Ia → aI
Ib → bI
IK → I
IF → a

Prueba con **n=2** y k=2

S → I A F → I aaNA F → I aaNaaNBF → I aaNaaNbKBF → I aaNaaNbKbKF
→ I aaaabNNKbKF → I aaaabNKXNbKF → I aaaabKXNXNbKF
→ I aaaabKXNXNbKF → I aaaabKNNbKXXF → I aaaabKNNbKFbb
→ I aaaabKbNNKFbb → I aaaabKbKXNXNFbb → I aaaabKbKNNFbbbb
→ aaaabIKbKFbbbb → aaaabbIFbbbb → aaaabbabbbb

Prueba con **n=1** y k=2

S → I A F → I aaNB F → I aaNbKbKF → aabIKXNbKF → aabIKXNbKF
→ aabIKbXKXNF → aabbIKNXXF → aabbIFbb → aabbabb

Para L_{32}

S → aS | aA
A → aA | bbB
B → bbB | aT | ε
T → aT | ε

b) La respuesta es si, porque L_{32} es un lenguaje Regular, lo cual se puede deducir de la siguiente manera dado que las tiras tienen esta forma: $a^n b^{2k} a^t$ lo cual significa:

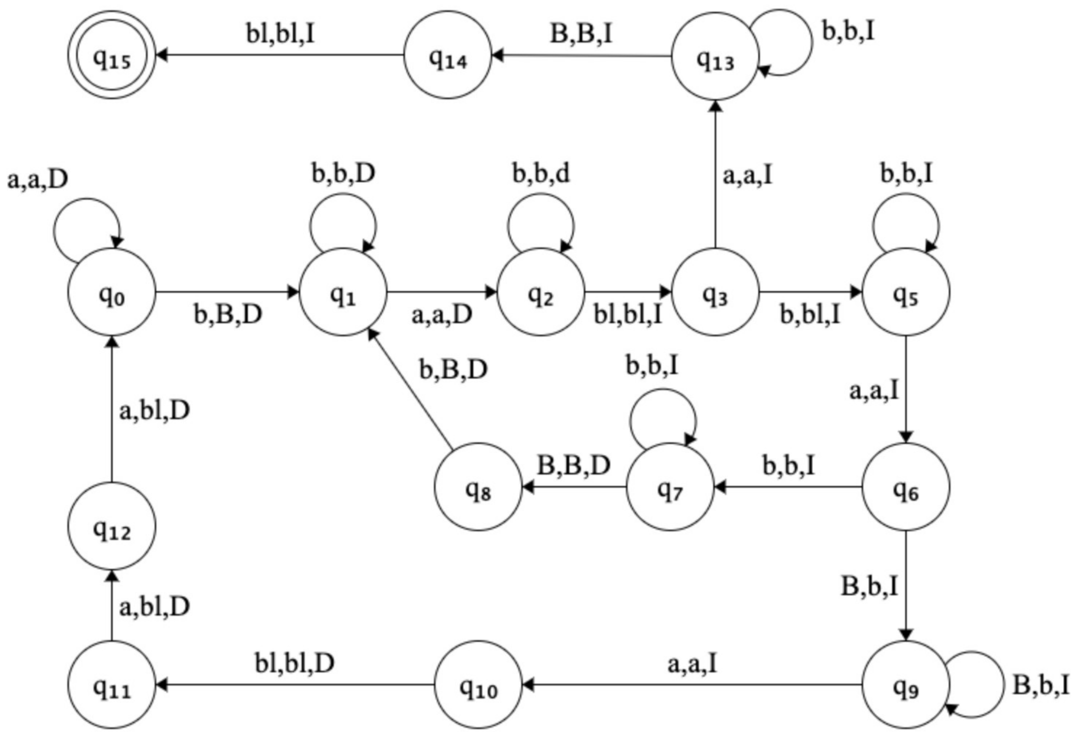
- comienzan con al menos una a (n≥1) y luego secuencias de a's : aa*
- siguen secuencias de paresde b's (al menos un par, k≥1): bb(bb)*
- termina con 0 o más a's (t≥0) : a*

L_{32} = L(aa*bb(bb)*a*)

Por Jerarquía de Chomsky, los lenguajes Regulares están contenidos en los Libres de Contexto y éstos en los Recursivamente Enumerables.
La gramática presentada en la parte a) para L_{32} cumple con las condiciones de una gramática irrestricta y en particular además de ser una gramática libre de contexto, es también regular.

Por tanto, en ambos casos sirve dar la misma gramática como solución a la parte b)

c)



Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 4

Sea $L_4 = \{x \,/\, x \in \{0,1\}^* \,/\, x$ NO es de la forma 0^n1^n , $n\geq 0\}$

a) Clasifique L_4 según la jerarquía de Chomsky sin utilizar el contrarrecíproco del Pumping Lema. Justifique su respuesta.
b) Construya una gramática G_4 / $L(G_4)=L_4$.
c) Construya un autómata M_4 / $L(M_4)$ = L4 . ¿Es determinista? Justifique.

Solución:

a) El lenguaje L_4 es libre de contexto no regular.

Que es libre de contexto se prueba en la parte b) mediante la construcción de una GLC, o en la parte c) en donde se da un APD para L_4 .
Para probar que L_4 no es regular y dado que no es posible utilizar el contrarrecíproco del Pumping Lema (por la letra), se demostrará utilizando propiedades de los Lenguajes Regulares.

Suponemos por hipótesis de absurdo que L_4 es regular. Entonces por propiedad de los lenguajes regulares, su lenguaje complemento $L_4{}^C$ es también regular.
Pero $L_4{}^C = \{ x \,/\, x \in \{0,1\}^* \,/\, x$ es de la forma 0^n1^n , $n\geq 0\}$ y sabemos que $L_4{}^C$ es un lenguaje libre de contexto no regular ➔ ABSURDO, L_4 no es regular.

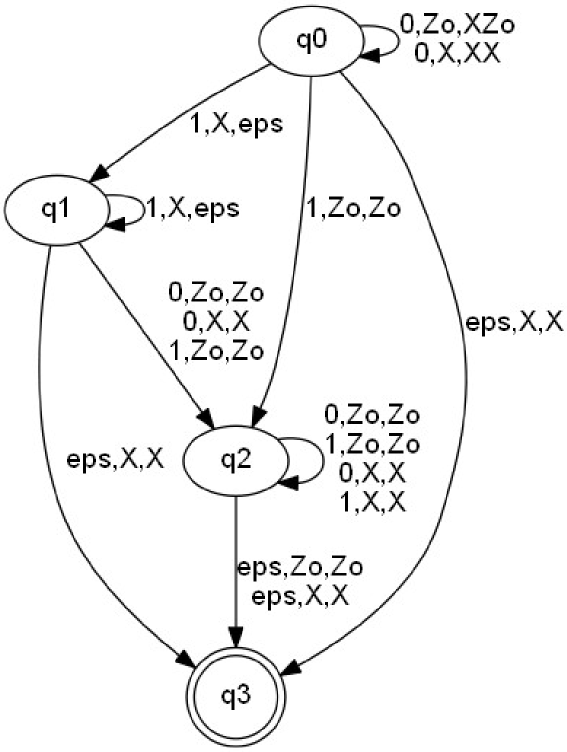
b) Se construye una gramática G_4 / $L(G_4)=L_4$.

G_4 = ({S,A,B,X,I},{0,1},P,S)

con P formado por las siguientes producciones:

A → 0A | 0 # genera 00^*
B → 1B |1 # genera 11^*
X → 0X | 1X | ε # genera $(0|1)^*$
I → 0I1 | ε # genera 0^n1^n n>=0
S → AI | AB0X | IB | 1X

c)



Es un APD no determinista (APDND), ya que por ejemplo desde el estado inicial q0 y con X en el stack, hay transiciones para las entradas 0 y 1 y hay también transición epsilon.