Teoría de Lenguajes

Soluciones

Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas sobre lenguajes definidos sobre $\Sigma = \{0,1\}$.

a) Si L_a es un lenguaje recursivamente enumerable NO libre de contexto y L_c es un lenguaje regular NO finito, entonces $L_a \cap L_c$ NO puede ser regular.

Falso: Tomando $L_a = \{ 0^k1^k0^k, k > 0 \}$ y $L_c = \{ 0^n10, n > 0 \}$, se tiene que $L_a \cap L_c = \{010\}$ que es finito y por lo tanto regular.

b) El lenguaje $L_b = \{ x$ / con x de la forma $0^k 1^p 0^k 1^t$ con $k > t \geq 0, p>0 \}$ es un lenguaje libre de contexto no regular.

Falso: Se usará el contrarecíproco del Pumping Lema para Lenguajes Libres de Contexto para probar que no es Libre de Contexto y por lo tanto tampoco Regular.

Dado N constante cualquiera, elegimos $z = 0^{N+1}10^{N+1}1^N$, $z \in L_b$ y $|z|=3N+3$
Estudiamos todas las descomposiciones de z=uvwxy que cumplen $|vx|>0$ y $|vwx|\leq N$

Familias	$\mathbf{0^{N+1}}$	**1**	$\mathbf{0^{N+1}}$	$\mathbf{1^N}$
1	v x			
2			v x	
3				v x
4	v x	x	x	
5	v	v	v x	
6			v x	x
7			v	v x
8	v		x	
9			v	x

Familia 1

$u=0^{N+1-p-q-r-s}$
$v=0^p$ $\quad$ $p+r > 0$
$w=0^q$ $\quad$ $p+q+r \leq N$
$x=0^r$
$y=0a^s10^{N+1}1^N$

$z_i = 0^{N+1-p-q-r-s} (0^p)^i 0^q (0^r)^i 0^s 10^{N+1}1^N = 0^{N+1-p+pi-r+ri-}10^{N+1}1^N = 0^{N+1-(p+r)(i-1)}10^{N+1}1^N$
Eligiendo i=0 queda $z_0= 0^{N+1-p-r}10^{N+1}1^N$
donde la cant_0(z_0) del comienzo de la tira es $\leq$ que cant_1(z_0) las **1**'s del final.
Por lo tanto $z_0 \notin L_b$

Familia 2, razonamiento análogo pero tomando el segundo grupo de **0**'s
Familia 3, razonamiento análogo, pero hay que tomar i=2, con lo cual ahí la cantidad de **1**'s es la que aumenta con respecto a los dos grupos de **0**'s.

Familia 4

$u=0^{N+1-p-q-r}$
$v=0^p$ $p+r+s+1 > 0$ (contempla casos p y/o r y/o s = 0)
$w=0^q$ $p+q+r+s+1 \leq N$
$x=0^r10^s$
$y=0^{N+1-s}1^N$

$z_i = 0^{N+1-p-q-r}(0^p)^i 0^q (0^r10^s)^i 0^{N+1-s}1^N = 0^{N+1-p-r}(0^p)^i (0^r10^s)^i 0^{N+1-s}1^N$
Eligiendo i=0 queda $z_0 = 0^{N+1-p-r} 0^{N+1-s}1^N$
donde NO queda la menos un **1** entre los 2 substrings de **0**'s. Por lo tanto $z_0 \notin L_b$

Familia 5, razonamiento análogo y argumento análogo.

Familia 6

$u=0^{N+1}10^{N+1-p-q-r}$
$v=0^p$ $p+r+j > 0$
$w=0^q$ $p+q+r+j \leq N$
$x=0^r1^j$
$y=1^{N-j}$

$z_i = 0^{N+1}10^{N+1-p-q-r}(0^p)^i 0^q (0^r1^j)^i 1^{N-j} = 0^{N+1}10^{N+1-p-r}(0^p)^i (0^r1^j)^i 1^{N-j}$

- si j=0, p y/o r >0, tomamos i=0 entonces queda $z_0 = 0^{N+1}10^{N+1-p-r}1^{N-j}$ con lo cual la cantidad de **0**'s del primer substring de **0**'s de z_0 es mayor que la cantidad de **0**'s del segundo substring de **0**'s. Por lo tanto $z_0 \notin L_b$
- si j >0, si r>0 tomamos i=2 y acá el problema es que en z_2, hay más de dos sectores de **1**'s separados por **0**'s
  si r=0 también tomando i=2, el problema es que la cantidad de **1**'s de z_2 del final de la tira es mayor o igual que la cantidad de **0**'s del primer substring de **0**'s.
Por lo tanto $z_2 \notin L_b$

Familia 7, el razonamiento es análogo.

Familia 8

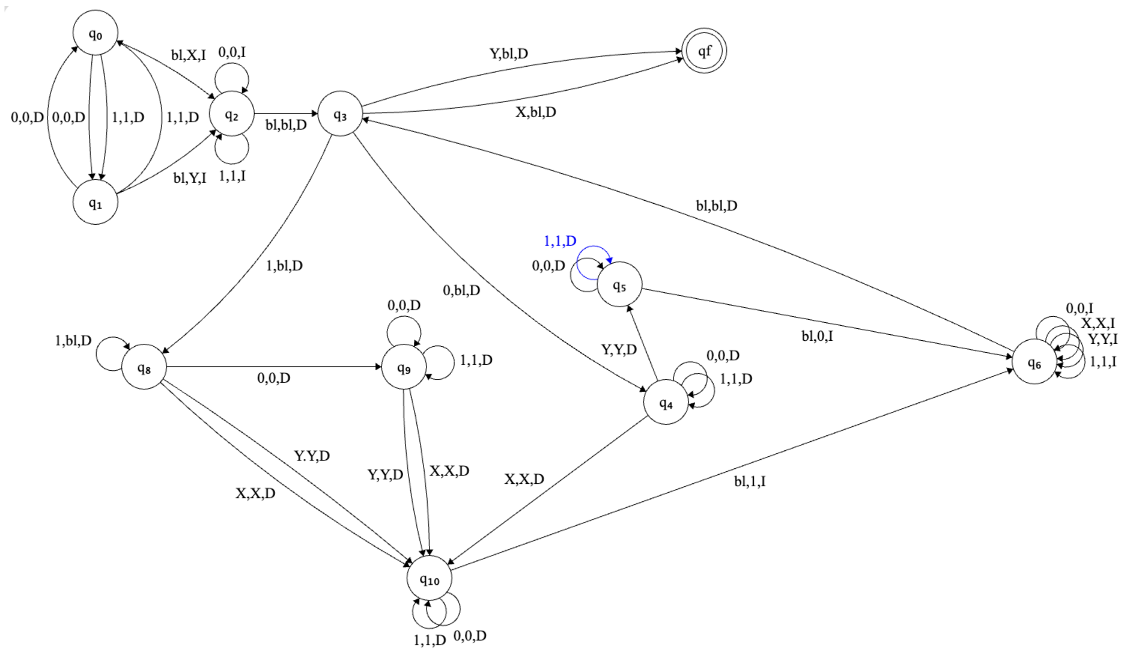
$u=0^{N+1-p-q}$
$v=0^p$ $p+r > 0$
$w=0^q10^s$ $p+q+r+s+1 \leq N$
$x=0^r$
$y=0^{N+1-s-r}1^N$

$z_i = 0^{N+1-p-q}(0^p)^i 0^q 10^s(0^r)^i 0^{N+1-s-r} 1^N = 0^{N+1-p}(0^p)^i 1(0^r)^i 0^{N+1-r} 1^N$
Eligiendo i=0 queda $z_0 = 0^{N+1-p}10^{N+1-r}1^N$
Como p+r>0, al menos uno de los 2 es >0, con lo cual la cantidad de **1**'s queda mayor o igual que el substring de **0**'s que corresponda con esa variable (p,r>0)
Por lo tanto $z_0 \notin L_b$

Familia 9 es similar, sólo que el argumento será que tomando i=2, la cantidad de **1**'s es mayor o igual que la cantidad de **0**'s del primer subtring de **0**'s.
Por lo tanto $z_2 \notin L_b$

Como estas son todas las descomposiciones posibles que cumplen $|vx|>0$ y $|vwx| \leq N$, se ha logrado demostrar por el contra-recíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto que L_b NO es ni siquiera un lenguaje Libre de Contexto, con lo cual la afirmación es **Falsa**.

Ejercicio 2



Ejercicio 3

$L_3 = \{x$ / x es de la forma $ab^nac^ma^t \wedge 0<m<n \wedge t \text{ MOD } 3 = 0 \}$

a) Se intentará probar por el Pumping Lema para Lenguajes Regulares que L_3 NO es regular

Sea N la constante del PL, y consideramos la tira $z = ab^{N+1}ac^N$ que pertenece a L_3

Se toman todas las descomposiciones z = uvw que cumplen: $|v|>0$ y $|uv|\leq N$ y se muestra que en todas ellas existe algún i, para el que la tira $uv^iw \notin L_3$**.**

Caso 1:
$u = \varepsilon$
$v = ab^p$ $p\geq 0$ $p+1 \leq N$
$w = b^{N+1-p}ac^N$

$z_i = (ab^p)^i\, b^{N+1-p}c^N$
Tomando i=0; $z_o = b^{N+1-p}c^{N+1}$ que $\notin L_3$ porque no comienza con la **a.**

Caso 2:
$u = ab^p$ $p\geq 0$ $q>0$
$v = b^q$ $1+p+q\leq N$
$w = b^{N+1-p-q}ac^N$

$z_i = ab^p(b^q)^i\, b^{N+1-p-q}\, ac^{N+1}$
Tomando i=0; $z_0 = ab^pb^{N+1-p-q}\, c^N = a\, b^{N+1-q}\, c^N \notin L_3$ porque al ser q>0, la cantidad de **b**'s es menor o igual a la cantidad de **c**'s, lo cual viola la restricción de m<n

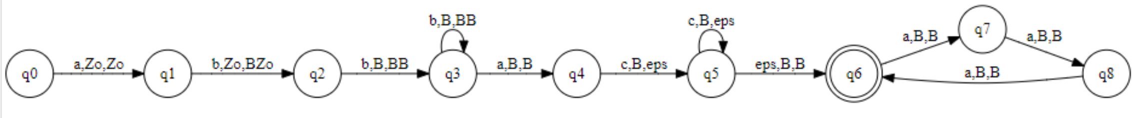
Estas son las posibles descomposiciones de z que cumplen $|v|>0$ y $|uv|\leq N$
Entonces por el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes regulares se puede afirmar que L_3 NO es Regular.

b) Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$

$x\, R_L\, y \;\Leftrightarrow\; \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que: $xz \in L \;\wedge\; yz \in L$ o $xz \notin L \;\wedge\; yz \notin L$

c) El Teorema de Myhill-Nerode dice que si un lenguaje es regular, entonces la cantidad de clases de equivalencia definidas por R_{L3} es finita. Como L_3 NO es Regular, entonces para R_{L3} se definen tienen clases.

d)



El APD construido es No Determinista porque se tienen las transiciones $\delta(q_5,c,B)$ y $\delta(q_5,\varepsilon,B)$, es decir, para un mismo estado y tope tiene la opción de consumir símbolo de la entrada o no

e) Se construye una gramática Libre de Contexto con las siguientes reglas de producción:

$S \rightarrow abBR \mid abB$
$B \rightarrow bBc \mid bB \mid bac$
$R \rightarrow aaa \mid aaaR$

Está simplificada porque no tienen símbolos inútiles, ni producciones épsilon ni producciones unitarias.

Ejercicio 4

$L_4 = \{\, p.x.p \;/\; x \in \{0,1\}^* \wedge p \in \{0,1\} \wedge p = |x|_1 \text{ MOD } 2 \,\}$

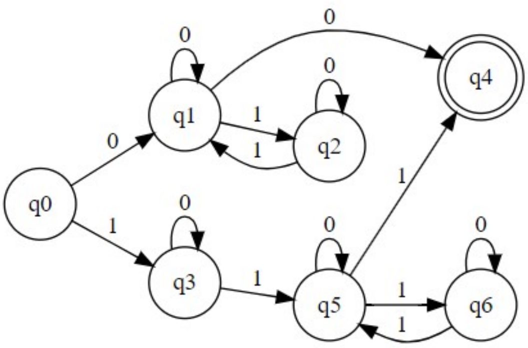
a) El lenguaje L_4 es Regular.

Tiras con cantidad par de 1's: **0*(10*10*)* :: A**

Tiras con cantidad impar de 1's: **0*10*(10*10*)* :: B**

Se construye a partir de ellas, una ER que describe L_4 de esta manera: **0A0 | 1B1**

b) Como L_4 es Regular, se construye un Autómata Finito M_4



Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

El AF construido es un AFND M_4 / $L_4 = L(M_4)$. Eso se verifica por ejemplo en las transiciones:

$\delta(q_1,0) = \{q_1, q_4\}$

c) Como L_4 es regular, se debe construir una gramática regular G_4 / $L_4 = L(G_4)$
En este caso, se va a construir una gramática lineal derecha para L_4 con las siguientes reglas de producción:

$S \rightarrow 0A \mid 1B$
$A \rightarrow 0A \mid 1C \mid 0$
$C \rightarrow 0C \mid 1A$

$B \rightarrow 0B \mid 1D$
$D \rightarrow 0D \mid 1E \mid 1$
$E \rightarrow 0E \mid 1D$