Teoría de Lenguajes

Soluciones
1er. Parcial – Curso 2022

Ejercicio 1.- [Evaluación individual del obligatorio]

a) i. re.findall

ii. tags = re.findall(r'<.*?a.*?>', texto_xml)

b) La función sub permite reemplazar las ocurrencias de un patrón en una string. Toma como entrada una expresión regular, una string por la cual sustituirla, y una string en la cual se harán los reemplazos.

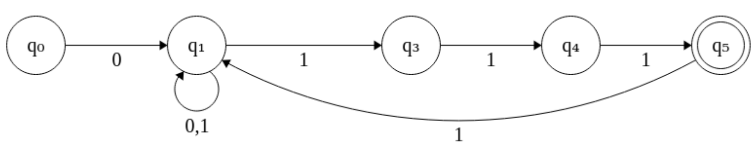
texto = "teoría de lenguajes"
texto_sin_espacios = re.sub(r'\s', '', texto)

El resultado es "teoríadelenguajes"

c) er = r'\d+|\d+\.\d+'

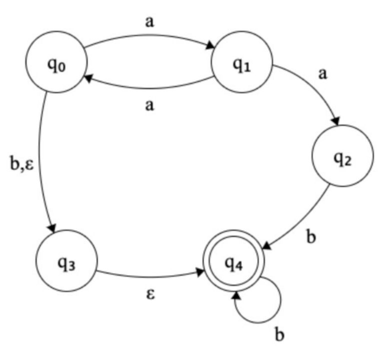
Ejercicio 2.-

a) $(0|1)^*$
b) $L_s=L_2=\{0^k x 1^n: k>0,\ n \bmod 3 = 0,\ n>0,\ x \in \{0,1\}^*\}$
c) La tira más corta es w=0111
d) El lenguaje es regular y daremos un AFND que lo reconozca



Ejercicio 3.-

a) AFND-ε



Pasaje AFND-ε → AFND

Cálculo de las ε-clausura de cada estado:

$\varepsilon_{cl}(q_0) = \{q_0,q_3,q_4\}$
$\varepsilon_{cl}(q_1) = \{q_1\}$
$\varepsilon_{cl}(q_2) = \{q_2\}$
$\varepsilon_{cl}(q_3) = \{q_3,q_4\}$
$\varepsilon_{cl}(q_4) = \{q_4\}$

$\delta'(q_0,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_0),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_0,q_3,q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{q_1\}) = \{q_1\}$
$\delta'(q_0,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_0),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_0,q_3,q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_3,q_4\}) = \{q_3,q_4\}$
$\delta'(q_1,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_1),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_1\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{q_0,q_2\}) = \{q_0,q_2,q_3,q_4\}$
$\delta'(q_1,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_1),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_1\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_2,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_2),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_2\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_2,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_2),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_2\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_4\}) = \{q_4\}$
$\delta'(q_3,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_3),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_3, q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_3,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_3),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_3, q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_4\}) = \{q_4\}$
$\delta'(q_4,a) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_4),a)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_4\},a)) = \varepsilon_{cl}(\{\}) = \{\}$
$\delta'(q_4,b) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\varepsilon_{cl}(q_4),b)) = \varepsilon_{cl}(\tilde{\delta}(\{q_4\},b)) = \varepsilon_{cl}(\{q_4\}) = \{q_4\}$

y $F'=\{q_0,q_4\}$

Pasaje AFND → AFD

δ''	a	b
$[q_0]$	$[q_1]$	$[q_3q_4]$
$[q_1]$	$[q_0q_2q_3q_4]$	$[]$
$[q_3q_4]$	$[]$	$[q_4]$
$[q_0q_2q_3q_4]$	$[q_1]$	$[q_3q_4]$
$[q_4]$	$[]$	$[q_4]$

y $F''=\{q_0,q_{34},q_{0234},q_4\}$

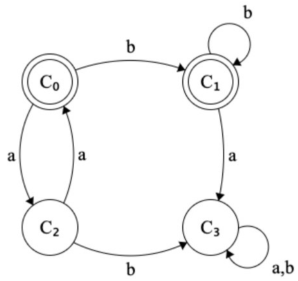
Agregamos el estado pozo para la minimización

δ''	a	b
$[q_0]$	$[q_1]$	$[q_3q_4]$
$[q_1]$	$[q_0q_2q_3q_4]$	$[q_p]$
$[q_3q_4]$	$[q_p]$	$[q_4]$
$[q_0q_2q_3q_4]$	$[q_1]$	$[q_3q_4]$
$[q_4]$	$[q_p]$	$[q_4]$
$[q_p]$	$[q_p]$	$[q_p]$

<u>Pasaje AFD → AFD- Mínimo</u>

$\pi_0 = \{q_0,q_{34},q_{0234},q_4\}\ \{q_1,q_p\}$
$\pi_1 = \{q_0,q_{34},q_{0234},q_4\}\ \{q_1\}\ \{q_p\}$
$\pi_2 = \{q_0,q_{0234}\}\ \{q_{34},q_4\}\ \{q_1\}\ \{q_p\}$
$\pi_3 = \{q_0,q_{0234}\}\ \{q_{34},q_4\}\ \{q_1\}\ \{q_p\}$
$C_0\sim\{q_0,q_{0234}\}$, $C_1\sim\{q_{34},q_4\}$, $C_2\sim\{q_1\}$, $C_3\sim\{q_p\}$

AFD- Mínimo



b) Dados $x,y \in \Sigma^*$: $x\ R_L\ y$ si $\forall\ z \in \Sigma^*$, $xz \in L \wedge yz \in L \vee xz \notin L \wedge yz \notin L$

c) Para hallar las clases de R_L utilizamos el método de calculo de clases de equivalencia de R_M sobre el autómata M_1', que al ser el autómata mínimo y completo, las clases de equivalencia de R_M y R_L coinciden.

$Y_0 = \varepsilon \mid Y_2a$
$Y_1 = Y_0b \mid Y_1b$
$Y_2 = Y_0a$
$Y_3 = Y_1a \mid Y_2b \mid Y_3a \mid Y_3b$

Sustituyendo Y_2 en Y_0 tenemos:
$Y_0 = \varepsilon \mid Y_2a = \varepsilon \mid Y_0aa = Y_0aa \mid \varepsilon$
Aplicando el Lema de Arden:
$Y_0 = \varepsilon\ (aa)^* = (aa)^*$

Sustituyendo Y_0 en Y_1:
$Y_1 = Y_0b \mid Y_1b = (aa)^*b \mid Y_1b = Y_1b \mid (aa)^*b$
Aplicando el Lema de Arden:
$Y_1 = (aa)^*bb^*$

Sustituyendo Y_0 en Y_2:
$Y_2 = Y_0a = (aa)^*a$

Sustituyendo Y_2 e Y_1 en Y_3:
$Y_3 = Y_1a \mid Y_2b \mid Y_3a \mid Y_3b = (aa)^*bb^*a \mid (aa)^*ab \mid Y_3(a|b) = Y_3(a|b) \mid (aa)^*bb^*a \mid (aa)^*ab$
Aplicando el Lema de Arden:
$Y_3 = ((aa)^*bb^*a \mid (aa)^*ab)(a|b)^*$

d) En la parte anterior se obtuvieron las clases de R_M para el autómata mínimo M_1'.

e) La expresión regular del lenguaje es la unión de las clases de equivalencia asociadas a los estados finales.

$L_1 = Y_o \mid Y_1$
$L_1 = (aa)^*|(aa)^*bb^*$

Ejercicio 4.-

a) Sean los siguientes lenguajes definidos sobre $\Sigma=\{a,b\}$. Diga para cada uno de ellos si son o no Regulares. Justifique.

i) $L_a = \{x \,/\, x \in \Sigma^*$ de la forma $b^p a^r b^t$ con $p>0$, $t=r-q$, $t,r,q\geq 0$ }

L_a NO Regular.

Utilizando el contrarrecíproco del Pumping Lemma, demostraremos que L_a no es Regular.
Sea N la constante del PL, consideramos la tira $z = ba^N b^N$ que pertenece a L_a

Consideramos ahora todas las descomposiciones z = uvw que cumplen: $|v|>0$ y $|uv|\leq N$.
Se va a mostrar que en todas ellas existe algún i, para el que la tira $uv^i w \notin L_a$.
Caso 1:

$u = \varepsilon$
$v = ba^q$ $\quad q\geq 0 \quad 1+q \leq N$
$w = a^{N-q}b^N$

$z_i = (ba^q)^i a^{N-q} b^N$
Tomando i=0; $z_o = a^{N-q}b^N$ que $\notin L_a$ porque no comienza con al menos una **b.**

Caso 2:

$u = ba^p$ $\quad p\geq 0$
$v = a^q$ $\quad q>0,\ 1+p+q\leq N$
$w = a^{N-p-q}b^N$

$z_i = ba^p(a^q)^i a^{N-p-q} b^N$
Tomando i=0; $z_o = ba^{N-q} b^N$ que $\notin L_a$ porque $N-q< N$ al ser $q>0$ y entonces z_0 tiene menor cantidad de **a**'s que **b**'s

Estas son las posibles descomposiciones de z que cumplen $|v|>0$ y $|uv|\leq N$
Entonces por el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes regulares podemos afirmar que L_a NO es Regular.

ii) $L_b = \{x \,/\, x \in \Sigma^*$ de la forma $b^p a^{r+j} b^q$ con $p,q\geq 0$, $r,j>0$, $q \bmod 2 = 0$ }

L_b Regular.
Se construye la siguiente ER que lo describe: **b*aaa*(bb)***
Explicación:

- como $p\geq 0$, al comienzo pueden o no venir **b**'s
- como $r,j>0$ (ambas son mayores que 0) significa que deben venir al menos dos **a**'s
- q mod 2 = 0 significa que termina en una cantidad par de **b**'s

iii) $L_c = (\Sigma^* - L_b).\{aa\}$

L_c Regular

Explicación: L_c es el complemento de L_b concatenado con un par de **a**'s. Si analizamos por separado ($\Sigma^* - L_b$), como L_b es Regular y por propiedad de clausura de lenguajes regulares, el complemento de un regular es regular, esa expresión es regular. Luego, el conjunto denotado por la expresión regular aa es regular (sólo esa tira). Y por propiedad de clausura de regulares, la concatenación de dos lenguajes regulares es regular.

b) La idea es asociar cada estado de la máquina con salida a una configuración dada de las tres llaves. Como hay tres llaves con dos posiciones posibles cada una, se tendrá un total de 8 estados en la máquina de Mealy.

La interpretación de los estados de la máquina será la siguiente:

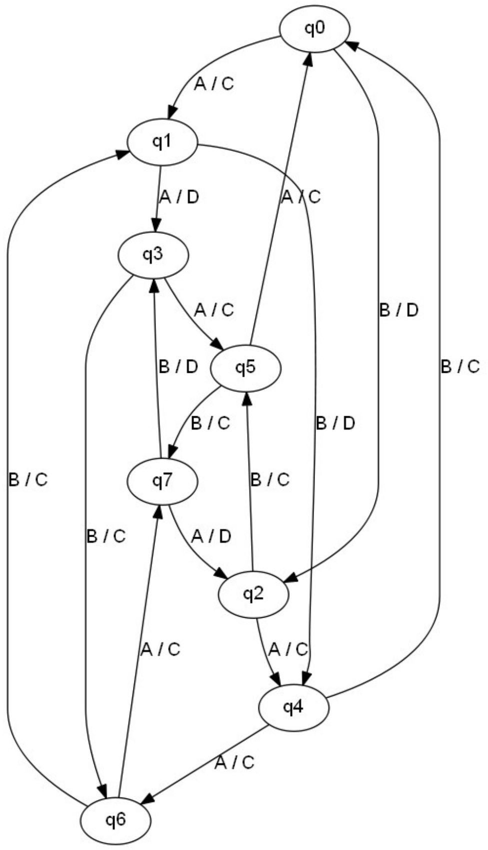
q0: X hacia la derecha, Y hacia la izquierda, Z hacia la derecha (configuración inicial)
q1: X hacia la derecha, Y hacia la derecha, Z hacia la derecha
q2: X hacia la izquierda, Y hacia la izquierda, Z hacia la izquierda
q3: X hacia la derecha, Y hacia la izquierda, Z hacia la izquierda
q4: X hacia la izquierda, Y hacia la derecha, Z hacia la izquierda
q5: X hacia la derecha, Y hacia la derecha, Z hacia la izquierda
q6: X hacia la izquierda, Y hacia la izquierda, Z hacia la derecha
q7: X hacia la izquierda, Y hacia la derecha, Z hacia la derecha

Las tablas de las funciones de transición y de salida de la máquina son:

δ	A	B
q_0	q_1	q_2
q_1	q_3	q_4
q_2	q_4	q_5
q_3	q_5	q_6
q_4	q_6	q_0
q_5	q_0	q_7
q_6	q_7	q_1
q_7	q_2	q_3

λ	A	B
q_0	C	D
q_1	D	D
q_2	C	C
q_3	C	C
q_4	C	C
q_5	C	C
q_6	C	C
q_7	D	D

El autómata de Mealy resulta:


q0
q1
q2
q3
q4
q5
q6
q7
A / C
A / D
A / C
B / D
B / C
A / C
B / D
B / C
B / D
B / C
B / C
A / D
B / C
A / C
A / C
A / C