Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta.

a) Si L_1 es un lenguaje recursivamente enumerable y L_2 es un lenguaje libre de contexto, entonces $L_1.L_2$ puede ser libre de contexto no regular.

Verdadero. Sean $L_1 = \{a\}$ que es finito, regular, libre de contexto y por lo tanto también recursivamente enumerable y $L_2 = \{a^k b^k \ / \ k \geq 0\}$.
Se tiene entonces que $L_1.L_2 = \{a\}.\{a^k b^k \ / \ k \geq 0\} = \{a^{k+1} b^k \ / \ k \geq 0\}$ que es libre de contexto no regular.

b) Si $L_1 \cap L_2$ es regular, $L_1 \cap L_3$ es libre de contexto no regular y $L_1 \neq L_2$, entonces $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ es regular.

Falso. Contraejemplo: Sean $L_1 = \Sigma^*$ ($\Sigma = \{a,b\}$), $L_2 = L(a^*b^*)$, $L_3 = \{a^k b^k \ / \ k \geq 0\}$.
Se tiene entonces que $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = L_3$ que no es regular

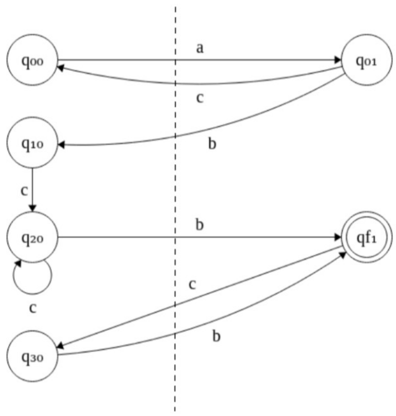
c) Sea un lenguaje L y un homomorfismo definido sobre los símbolos de L.
Si h(L) es regular podemos afirmar que L es regular.

Falso. Considere el homomorfimsmo: h(0)=a, h(1)=a sobre el alfabeto {0,1}.
Sea $L = \{0^k 1^k, k>0\}$ (que se sabe NO regular).
Se tiene que $h(L) = \{w \ / \ w$ es de la forma $a^{2k}\}$, que son las tiras con cantidad par de a's, que es regular.

Ejercicio 2

a) Construya un AF-2cintas que reconozca el siguiente lenguaje:

$L_{2a} = \{(a^k c^p b^m, c^{k-1} b c^{m-1}), \text{ con } k,m,p>0\}$



b) Dado el siguiente autómata finito M_2:({q0, q1, q2, q3, q4}, {a,b}, δ, q0, {q3}) siendo d dado por:

	a	**b**	**ε**
q0	{q1 , q3}	{q1}	{q4}
q1	Φ	{q0 , q2}	Φ
q2	Φ	{q3}	Φ
q3	Φ	Φ	Φ
q4	Φ	{q0 , q2}	{q3}

Construya el autómata finito mínimo M_2' / $L(M_2)=L(M_2')$

Pasaje AFND-ε → AFND, se aplica δ′(q,a) = ε-clausura(δ(ε-clausura(q),a))

ε-clausura({q0}) = {q0, q3, q4}
ε-clausura({q1}) = {q1}
ε-clausura({q2}) = {q2}
ε-clausura({q3}) = {q3}
ε-clausura({q4}) = {q3 , q4}

	a	**b**
q0	{q1, q3}	{q0, q1, q2, q3, q4}
q1	Φ	{q0, q2, q3, q4}
q2	Φ	{q3}
q3	Φ	Φ
q4	Φ	{q0, q2, q3, q4}

F′ = {q0, q3}

Pasaje AFND → AFD

	δ″	**a**	**b**
p0	[q0]	[q1, q3]	[q0, q1, q2, q3, q4]
p1	[q1, q3]	-	[q0, q2, q3, q4]
p2	[q0, q1, q2, q3, q4]	[q1, q3]	[q0, q1, q2, q3, q4]
p3	[q0, q2, q3, q4]	[q1, q3]	[q0, q1, q2, q3, q4]

Q″ = {p0, p1, p2, p3, pp}
F″ = {p0, p1, p2, p3}

Antes de minimizar, se agrega el estado pp (estado pozo).
A ese estado se accede desde p1 con una **a**, es decir, δ″(p1,a)=pp;
luego δ″(pp,a) = δ″(pp,b) = pp

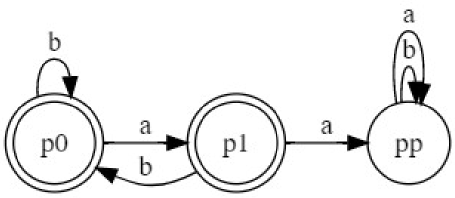
Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

<u>Minimización</u>
π0 [p0, p1, p2, p3] [pp]
π1 [p1] [p0, p2, p3] [pp]
π2 [p1] [p0, p2, p3] [pp]

AFD Mínimo

δ	a	b
p0	p1	p0
p1	pp	p0
pp	pp	pp

Estados finales: p0 y p1



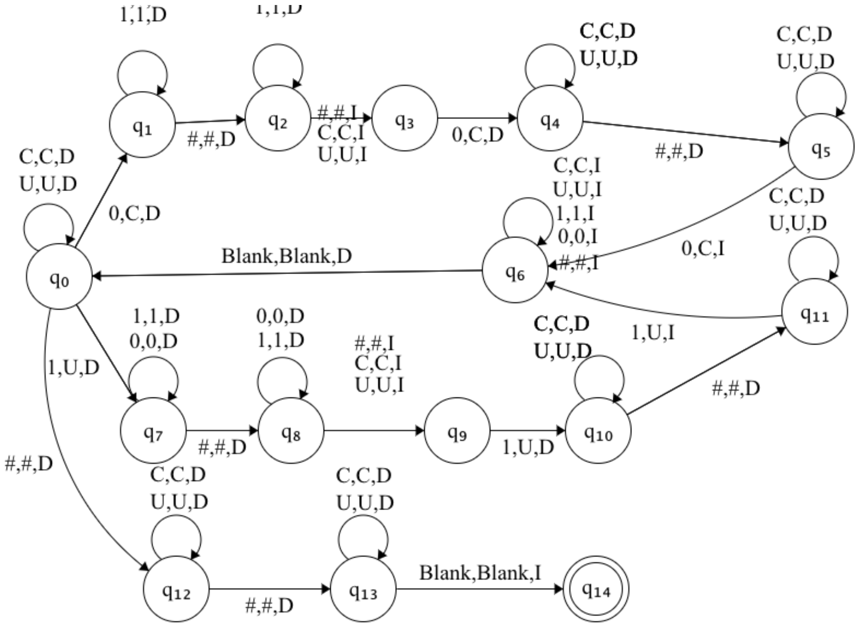
Ejercicio 3

Sea el lenguaje $L_3 = \{ x^r\#x\#x^r \ / \ x \in \{0,1\}^* \}$ } que se sabe no es libre de contexto

a) Construya un autómata $M_3 / L_3 = L(M_3)$.

b) Construya una gramática $G_3 / L_3 = L(G_3)$.

a) Al no ser Libre de contexto, se construye la siguiente MT



b) Se da una Gramática Irrestricta G_3 que genera L_3.

$G_3 = (\{S,S_1,U,C,F\}, \{0,1\},P,S\}$

P tiene las siguientes producciones:

$S \rightarrow S_1\#F$
$S_1 \rightarrow 1US_11 \mid 0CS_10 \mid \#$
$U1 \rightarrow 1U$
$U0 \rightarrow 0U$
$U\# \rightarrow \#U$
$UF \rightarrow F1$
$C1 \rightarrow 1C$
$C0 \rightarrow 0C$
$C\# \rightarrow \#C$
$CF \rightarrow F0$
$\#F \rightarrow \#$

Ejercicio 4

Sea $L_4 = \{c^p a^m b^{2n} c^k / 0 \le m < k \ \text{ y } \ p,n \ge 1\}$

a) Clasifique L_4 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

El lenguaje es libre de contexto y no regular. Se probará que no es regular utilizando el contrarrecíproco del *pumping lemma* para lenguajes regulares y en la siguiente parte se probará que es libre de contexto dando un autómata push down que lo reconozca.

Consideremos entonces la tira $z= ca^Nbbc^{N+1}$.

Familia 1

$u = \varepsilon$	$0+1+p \le N$
$v = ca^p$	$1+p \ge 1$
$w = a^{N-p}bbc^{N+1}$	

$z_i = (ca^p)^i a^{N-p}bbc^{N+1}$

Tomando i=0 obtenemos: $z_0 = (ca^p)^0 a^{N-p}bbc^{N+1} = a^{N-p}bbc^{N+1}$, que provoca la eliminación de la primer c, por lo que se rompe la condición de que al inicio de toda tira debe haber al menos una c. Entonces $z_0 \notin L_4$

Familia 2

$u = ca^p$	$1+p+q \le N$
$v = a^q$	$q \ge 1$
$w = a^{N-(p+q)}bbc^{N+1}$	

$z_i = ca^p a^{(q)*i} a^{N-(p+q)}bbc^{N+1} = ca^{N+q(i-1)} bb c^{N+1}$

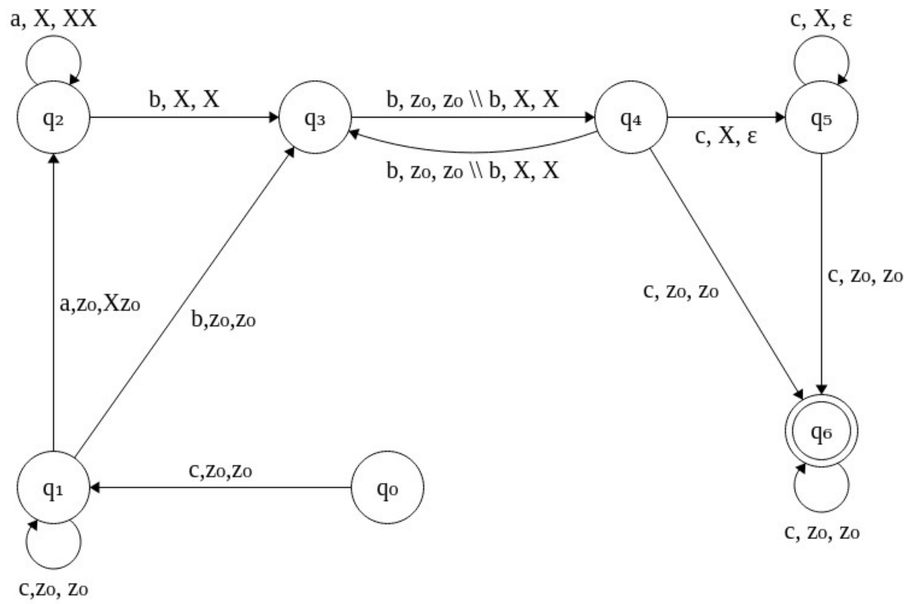
Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Tomando i=3 obtenemos: $z_3 = ca^{N+q(3-1)}\ bb\ c^{N+1} = ca^{N+2q}\ bb\ c^{N+1}$

Y como por hipótesis sabemos que $q\geq1$ entonces $N+2q \geq N+2$, por lo que se rompería la condición de que la cantidad de c's del final (N+1) tiene que ser estrictamente mayor que la cantidad de a's (al menos N+2). Por lo tanto, $z_3 \notin L_4$

Al haber estudiado todas las descomposiciones posibles para la tira $z= ca^N bbc^{N+1}$ que cumplen $|uv|\leq N$ y $|v|\geq1$, por el contrarrecíproco del Pumping Lemma concluimos que el lenguaje L_4 **no es regular**.

b) Construya un autómata M_4 tal que $L_4 = L(M_4)$. ¿Es determinista? Justifique.



El autómata presentado es **determinista** porque para todo par estado-tope de stack, dado un símbolo en la entrada, hay una sola transición posible.

c) Sea el siguiente homomorfismo h sobre Σ:

- $h(a)=\varepsilon$
- $h(b)=ja$
- $h(c)=\varepsilon$

i) Exprese $h(L_4)$ por comprensión.

$h(L_4) = \{(ja)^{2n} \text{ con } n\geq1\}$

ii) Clasifique $h(L_4)$ según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

El lenguaje $h(L_4)$ es regular. Como no hay otra restricción de que la tira son secuencias del substring **ja** un número par de veces, $h(L_4)$ se puede representar por la siguiente expresión regular: **jaja(jaja)***

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

iii) Construya una gramática G_h / $h(L_4) = L(G_h)$

Al ser regular, se da una gramática regular, en particular una GLD con las siguientes reglas de producción:

$$S \rightarrow jajaS \mid jaja$$

Por otro lado, se puede observar además que la gramática está simplificada porque no posee producciones **unitarias** ni **épsilon**, y todas sus variables son **positivas** y **alcanzables**.

d) Construya una gramática G_4 / $L_4 = L(G_4)$. Si es posible, dé una gramática simplificada. Justifique su razonamiento.

$S \rightarrow cS \mid caXc \mid cYZ$
$X \rightarrow aXc \mid Xc \mid Yc$
$Y \rightarrow bbY \mid bb$
$Z \rightarrow cZ \mid c$

Nuevamente, esta gramática está simplificada porque tampoco posee producciones **unitarias** ni **épsilon**, y todas sus variables son **positivas** y **alcanzables**.

Soluciones agregadas para el 2do. Parcial (extra)

Ejercicio 1

b) Para el lenguaje $L_{2b} = \{ a^k c^p \# b^m / k,p,m \geq 0 \;\; p \text{ MOD } 2 = 0 \}$, es posible construir una gramática lineal izquierda simplificada.

Verdadero. Si, es posible. A continuación se da una GLI simplificada.

S –> Sb | B# | #
B –> Bcc | cc | Acc | a
A –> Aa | a

está simplificada porque:

- No tiene producciones-ε
- No tiene producciones unitarias
- Todas las variables son alcanzables desde S
- Todas las variables son positivas

Ejercicio 3

a) L_3 es un Lenguaje Recursivamente Enumerable, (lo cual se demuestra con la G.I. de la parte c), y **no** es un lenguaje libre de contexto, lo cual se demuestra aplicando el contra-recíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto.

Dado N constante del PL, elegimos $z = 0^N\#0^N\#0^N$, $z \in L_3$, $|z| = 3N+2 \geq N$
Estudio todas las descomposiciones de z=uvwxy que cumplen $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$

Familias	0^N	#	0^N	#	0^N
1	v x				
2			v x		
3					v x
4	v		x		
5			v		x
6	v x	x	x		
7	v	v	v x		
8			v x	x	x
9			v	v	v x

Observar que para todas las tiras de L_3 se cumple siempre que $|x^r| = |x|$, por lo cual basta romper esa propiedad para probar que $z_i \notin L_3$.

Familia 1

La descomposición de esta familia sería:

$u=0^p$

$v=0^q$ $|vx| = q+s \geq 1$

$w=0^r$ $|vwx| = q+r+s \leq N$

$x=0^s$

$y=0^{N-p-q-r-s}\#0^N\#0^N$

$z_i = 0^p\,(0^q)^i\,0^r\,(0^s)^i\,0^{N-p-q-r-s}\#0^N\#0^N = 0^{p+qi+r+si+N-p-q-r-s}\#0^N\#0^N = 0^{N+(q+s)(i-1)}\#0^N\#0^N$

Tomando $i=2$ $z_2 = 0^{N+(q+s)}\#0^N\#0^N$

Entonces tenemos que z_2 no queda de la forma de las tiras del lenguaje, pues al tener largos distintos los strings de **0**'s, es imposible entre los **#** esté el reverso de cualquiera de los otros dos substrings de **0**'s ya que pues $q+s \geq 1$

Familias 2 y 3

Son análogas a la Familia 1, pero cambia la cantidad de **0**'s entre los #s (Familia 2) y después del segundo # (Familia 3) rompiéndose la propiedad de los largos.

Familia 4

La descomposición de esta familia sería:

$u=0^{N-p-q}$

$v=0^p$ $|vx| = p+s \geq 1$

$w=0^q\#0^r$ $|vwq| = p+q+1+r+s \leq N$

$x=0^s$

$y=0^{N-r-s}\#0^N$

$z_i = 0^{N-p-q}\,(0^p)^i\,0^q\#0^r(0^s)^i\,0^{Nr-s}\#0^N$

Si $p>0$, con $i=2$, cambia la cantidad de símbolos de la primera secuencia de **0**'s

Si $p=0$ entonces $s>0$, con $i=2$, cambia la cantidad de símbolos de la secuencia de **0**'s entre los **#**

Familia 5

Es análoga a la Familia 4, pero cambia la cantidad de **0**'s entre los #s y después del segundo #. Como p y s no pueden ser ambos 0, alguna de las condiciones de los largos se rompe.

Familia 6

La descomposición de esta familia sería:

$u=0^{N-p-q-r}$

$v=0^p$ $|vx| = p+r+1+s \geq 1$

$w=0^q$ $|vwq| = p+q+r+1+s \leq N$

$x=0^r\#0^s$

$y=0^{N-s}\#0^N$

Tomando $i=0$, z_0 queda con un solo # y por lo tanto $z_0 \notin L_3$

Familias 7, 8 y 9

Son análogas a la Familia 6, eligiendo $i=0$ la tira $z_0 \notin L_3$

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Como se han estudiado todas las descomposiciones que cumplen $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$, se puede afirmar que L_3 **no** es un lenguaje libre de contexto y como se dijo al comienzo, como po ejemplo en la parte c) se construirá una GI con eso quedará demostrado que L_3 es recursivamente enumerable.