Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1

Diga si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justifique en cada caso.

a) Sea el L un lenguaje Regular y $k \in N$ una constante dada. Entonces $L' = \{ x / x \in L , | x | \geq k\}$ es también un lenguaje Regular
b) Si L es Libre de Contexto no Regular, entonces L^r no es Regular.
c) Para el lenguaje $L = \{ b^t a^p b^r a^k / k < 2*p$, k múltiplo de 2; $t,r \geq 1$; $p,k > 0 \}$ existe un Autómata Finito Determinista M / L =L(M).
d) Idem anterior pero existe una MT M / L =L(M).
e) Idem (c) pero existe un Autómata Push Down M / L =L(M).

a) VERDADERO
Sea L_k el lenguaje L al que se le quitando una cantidad finita de tiras (las tiras de largo < k), que el un lenguaje finito y por tanto regular.
Entonces tenemos que $L' = L - L_k = L \cap (L_k)^c$
El complemento de un lenguaje regular es regular y la intersección de regulares es regular.
Con lo cual la diferencia de regulares es regular.

b) VERDADERO
Supongo que L^r es Regular. Como los lenguajes regulares son cerrados bajo reverso, entonces L sería regular. Notar que $(L^r)^r = L$
Pero L es NO Regular, entonces L^r es NO Regular. Además se puede afirmar que es Libre de Contexto porque los Libres de Contexto son cerrados bajo reverso.

c) FALSO
Se probará por en contrarecíproco del PL para lenguajes regulares que NO es Regular y por tanto no puede existir un autómata finito que lo reconozca.

Sea N la cte del PL y $z = ba^{N+1}ba^{2N}$
Se observa que $|z| \geq N$
Analizamos las familias de descomposiciones de z = uvw que cumplen: $|uv| \leq N$, $|v| \geq 1$

Familia 1:
$u = \varepsilon$
$v = ba^t$ $t \geq 0$ $t+1 \leq N$
$w = a^{N+1-t}ba^{2N}$

$z_i = (ba^t)^i a^{N+1-t} ba^{2N}$
Tomando i = 0 $z_0 = a^{N+1-t} ba^{2N}$ de donde $z_0 \notin L$ porque no comienza con b

Familia 2:
$u = ba^t$ $t \geq 0$
$v = a^r$ $r \geq 1$ $r+t+1 \leq N$
$w = a^{N+1-t-r} ba^{2N}$

$z_i = ba^t (a^r)^i a^{N+1-t-r} ba^{2N}$

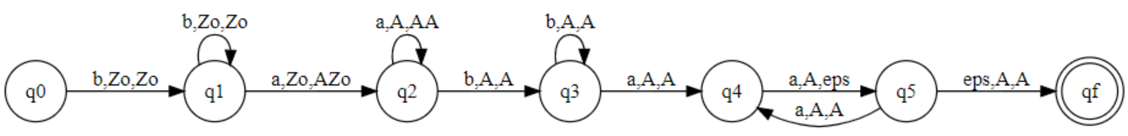
Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Tomando nuevamente $i = 0$ $z_0 = ba^t a^{N+1-t-r} ba^{2N} = ba^{N+1-r} ba^{2N}$ de donde $z_0 \notin L$ porque no se cumple la relación entre la cantidad de a's; es decir, no se cumple $k < 2*p$ puesto que se tiene $p=N+1-r$ y $k=2N$
Entonces no se cumple que $2N < 2(N+1-r) = 2N + 2 - 2r$ porque $r \geq 1$

Como estas son las únicas 2 familias de descomposiciones que cumplen $|uv| \leq N$, $|v| \geq 1$ y en cada una encontramos falla en encontrar un $i \in \aleph$ / $uv^iw \notin L$, entonces L NO Regular
Entonces NO existe AF M / L =L(M).

d) VERDADERO
Como en la parte (e) se construye un APD, entonces es Libre de Contexto y por tanto recursivamente enumerable; de donde se puede afirmar que también existe una Máquina de Turing M / L =L(M).

e) VERDADERO
Se construye un APD M / L =L(M)



Ejercicio 2

a) Defina la relación R_L siendo L un lenguaje cualquiera.

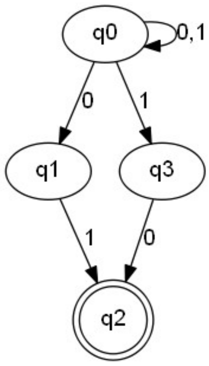
$$x \, R_L \, y \text{ si } \forall z \in \Sigma^*, xz \in L \wedge yz \in L \\ \vee \; xz \notin L \wedge yz \notin L$$

b) Sea L_2 el lenguaje de las tiras pertenecientes a {1,0}* con largo mayor o igual a 2 y tal que los 2 últimos símbolos de la tira son distintos entre sí.

i. Construya el AFD Mínimo M_2 / L_2 =L(M_2).
ii. Exprese las clases de equivalencia definidas por la relación R_{L2} mediante expresiones regulares. Justifique.
iii. Dé una expresión regular que denote al lenguaje L_2 basada en las expresiones regulares halladas en ii).

i.

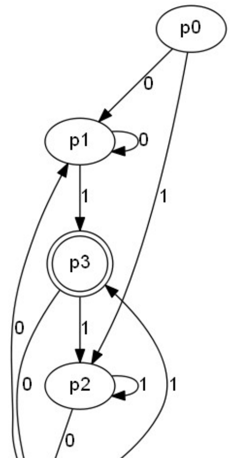
Partimos del AFND que intuitivamente es fácil de computar:



Pasaje AFND → AFD

	δ	***0***	***1***
p0	[q0]	[q0,q1]	[q0,q3]
p1	[q0,q1]	[q0,q1]	[q0,q2,q3]
p2	[q0,q3]	[q0,q1,q2]	[q0,q3]
p3	[q0,q2,q3]	[q0,q1,q2]	[q0,q3]
p4	[q0,q1,q2]	[q0,q1]	[q0,q2,q3]

F={p3,p4}



Observamos que el AFD obtenido es completo (función de transición total).

Minimización:

Π_0 [p0,p1,p2] [p3,p4]
Π_1 [p0] [p1] [p2] [p3] [p4]

El AFD de partida obtenido ya es mínimo

δ	*0*	*1*
p0	p1	p2
p1	p1	p3
p2	p4	p2
p3	p4	p2
p4	p1	p3

F = {p3, p4}

ii.

Se calculan las expresiones regulares de las clases de equivalencia de R_M para el autómata mínimo, con el sistema de ecuaciones presentado en el curso. Como el AFD es mínimo, por Myhill-Nerode las clases de R_M coinciden con las de R_L y por lo tanto las expresiones regulares que se obtienen son las solicitadas.

Para cada estado p_i se tiene una expresión regular asociada X_i correspondiente a las tiras de Σ* que partiendo del estado inicial p_0 terminan en dicho estado p_i.
Se utiliza el Lema de Arden: la única solución a la ecuación X = Xr | s es: X = sr* si $\varepsilon \notin$ L(r).

$X_0 = \varepsilon$
$X_1 = X_0 0 \mid X_1 0 \mid X_4 0$
$X_2 = X_0 1 \mid X_2 1 \mid X_3 1$
$X_3 = X_1 1 \mid X_4 1$
$X_4 = X_2 0 \mid X_3 0$

Aplicando Arden para X_1 y X_2 y sustituyendo en X_3 y X_4 resulta:

$X_0 = \varepsilon$
$X_1 = X_1 0 \mid (0 \mid X_4 0) = (0 \mid X_4 0)\, 0^*$
$X_2 = X_2 1 \mid (1 \mid X_3 1) = (1 \mid X_3 1)\, 1^*$
$X_3 = (0 \mid X_4 0)\, 0^*1 \mid X_4 1$
$X_4 = (1 \mid X_3 1)\, 1^*0 \mid X_3 0$

Sustituyendo la expresión para X_4 en X_3 :

$X_3 = 00^*1 \mid 11^*000^*1 \mid 11^*01 \mid X_3\,(11^*000^*1 \mid 11^*01 \mid 000^*1 \mid 01)$

Aplicando Arden se tiene :

$X_3 = (00^*1 \mid 11^*000^*1 \mid 11^*01)\,(11^*000^*1 \mid 11^*01 \mid 000^*1 \mid 01)^*$

En función de X_3, las expresiones regulares para los demás estados quedan:
$X_0 = \varepsilon$
$X_1 = 0\,0^* \mid 11^*000^* \mid X_3\,(1\,1^*0 \mid 0)00^*$
$X_2 = 11^* \mid X_3 11^*$
$X_4 = 11^*0 \mid X_3\,(1\,1^*0 \mid 0)$

iii.

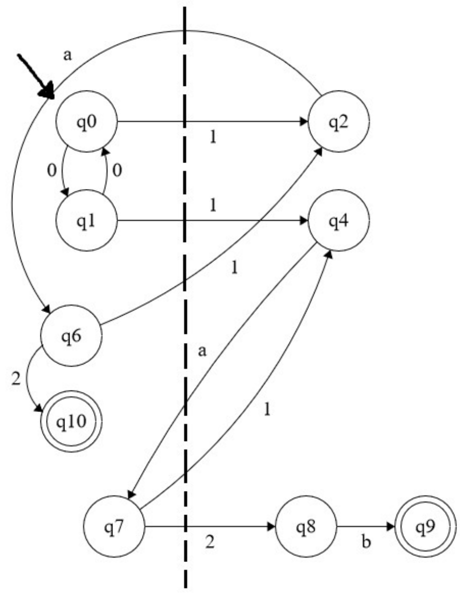
r_{L2} = X_3 | X_4 es la expresión regular que denota a la unión de las clases de equivalencia asociadas a los estados finales del AFD mínimo, y por lo tanto $L_2 = L(r_{L2})$.

r_{L2} = 11*0 | X_3 (ε | 1 1*0 | 0)

r_{L2} = 11*0 | (00*1 | 11*000*1 | 11*01) (11*000*1 | 11*01 | 000*1 | 01)* (ε | 1 1*0 | 0)

c) Construya un autómata de dos cintas que reconozca el lenguaje formado por los pares de tiras:

$L_{2c} = \{ (0^k1^n2, a^nb^{k \bmod 2}),$ con $k \geq 0$ y $n > 0\}$



Ejercicio 3

Sean los siguientes lenguajes:

i. L_{31} = { x / x es de la forma $b^{k \bmod 3}a^n b^k$, con k,n ≥ 0 }
ii. L_{32} = { wz / |w| = |z| y con w ∈ {a,b}*, z ∈ {c,d}*, $|z|_c \geq |z|_d$ }
iii. L_{33} = { x / x es de la forma $b^t w$, con w ∈ {a,c}*, t impar, $|w|_c = 2*|w|_a \geq 0$ }

Construya gramáticas para cada uno de los lenguajes precedentes que se correspondan a su tipo según la Jerarquía de Chomsky.

i. L_{31} es un lenguaje Regular

k mod 3 = 0 ⇒ k = 3p - *se controla con la variable C*
k mod 3 = 1 ⇒ k = 3p +1 - *se controla con la variable U*
k mod 3 = 2 ⇒ k = 3p +2 - *se controla con la variable D*

S→ C | bU | bbD

C→ aC | B

U→ aU | bB

D → aD| bbB

B → bbb B | ε

ii. L_{32} es un lenguaje recursivamente enumerable

S → a S X | b S X | ε

XX → cd
X → c

ab → ba
ba → ab
cd → dc
dc → cd

iii. L_{33} es un lenguaje Libre de Contexto

S → bbS | bX

X → ccaX | ccXa | cXca | Xcca
| cacX | caXc | cXac | Xcac
| accX | acXc | aXcc | Xacc
| ε

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**