Teoría de Lenguajes

Soluciones

Ejercicio 1

Sea el lenguaje $L_1 = \{ x\#x^r\#x \ / \ x \in \{a,b\}^* \}$ (x^r es el reverso de x)

a) Clasifique L_1 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique su respuesta.
b) Construya un autómata M_1 / $L_1 = L(M_1)$.¿Es determinista? Justifique.

Solución:

a) El lenguaje L_1 propuesto es recursivamente enumerable, lo que se demuestra en la parte b) mediante la construcción de una máquina de Turing que lo reconoce. No es un lenguaje libre de contexto, lo cual se prueba aplicando el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto.
Dado N, elegimos para el pumping la tira $Z= a^N\#a^N\#a^N$. Tenemos que $|Z| = 3N+2 > N$, y además se cumple que $Z \in L_1$ ya que las como las tiras entre # están compuestas sólo por a's, se cumple que $x=x^r$.

Analizamos las descomposiciones de z = uvwxy y consideramos aquellas familias que cumplen las condiciones $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$.

Familia	a^N	**#**	a^N	**#**	a^N
1	v x				
2			v x		
3					v x
4	v x	x	x		
5	v		x		
6	v	v	v x		
7			v x	x	x
8			v		x
9			v	v	v x

Familia 1:
$u = a^p$
$v = a^q$ $\quad q+s \geq 1$
$w = a^r$ $\quad q+r+s \leq N$
$x = a^s$
$y = a^{N-p-q-r-s}\#a^N\#a^N$

$z_i = a^{N+(q+s)(i-1)}\#a^N\#a^N$
$z_0 = a^{N-(q+s)}\#a^N\#a^N$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Como $q+s \geq 1$, el largo de la primera secuencia de **a**'s es menor estricto por ejemplo del largo de la última secuencia, luego no se cumple que sea la tira x al comienzo y al final de z_0, y por lo tanto $z_0 \notin L_3$.

Familias 2 y 3:
Análogas a la familia (1), en ambos casos $z_0 \notin L_1$. En la (2), la secuencia de **a**'s entre los "#" es menor que cualquiera de las otras y en la (3) el argumento es al revés del de la familia (1).

Familia 4:
$u = a^{N-p-q-r}$
$v = a^p$
$w = a^q$
$x = a^r\#a^s$ $\quad p+q+r+s+1 \leq N \quad p+r+s+1 \geq 1$
$y = a^{N-s}\#a^N$

$z_i = a^{N+p(i-1)-r}\ (a^r\#a^s)^i\ a^{N-s}\#a^N$
$z_0 = a^{2N-p-s-r}\#a^N$
luego z_0 tiene un único "#", y por lo tanto $z_0 \notin L_1$

Familias 6,7 y 9:
Análogas a la familia (4), eligiendo i=0 en todos los casos $z_0 \notin L_1$ por tener sólo un "#".

Familia 5:
$u = a^{N-p-q}$
$v = a^p$ $\quad p+s \geq 1$
$w = a^q\#a^r$ $\quad p+q+1+r+s \leq N$
$x = a^s$
$y = a^{N-r-s}\#a^N$

$z_i = a^{N+p(i-1)}\#\ a^{N+s(i-1)}\#a^N$
$z_2 = a^{N+p}\#a^{N+s}\#a^N$

Como $p+s \geq 1$, debe ser $p\geq1$ o $s\geq1$

<u>Si $p \geq 1$</u> :
$N + p \geq N + 1$, se tiene que el largo de la primera secuencia de **a**'s sea estrictamente mayor que el largo de la tercera secuencia de **a**'s, con lo cual no tengo x al comienzo y al final de la tira y por consiguiente $z_2 \notin L_1$.

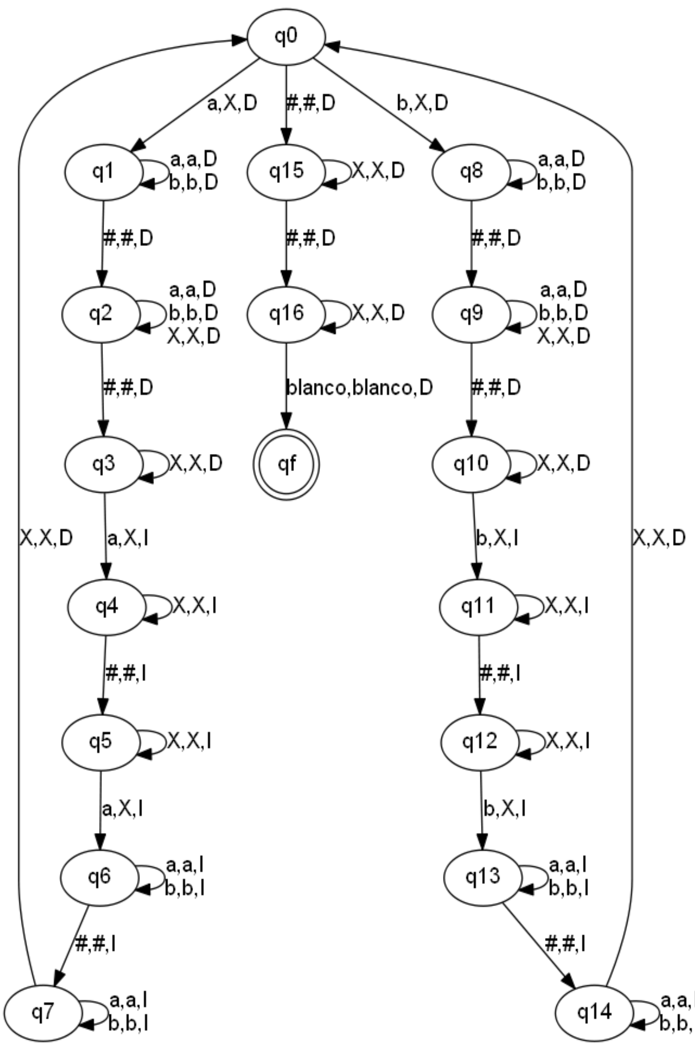
<u>Si $s \geq 1$</u> :
$N + s \geq N + 1$, se tiene que el largo de la secuencia de **a**'s entre los "#" es estrictamente mayor que por ejemplo el largo de la tercera secuencia de **a**'s, con lo cual no se cumple que es el reverso y por consiguiente $z_2 \notin L_1$.

Familia 8:
Es análoga a la familia (5) tomando i=2, con el mismo argumento, es decir, la secuencia de **a**'s entre los "#" es mayor que las otras secuencias o la primera y la tercer secuencia tienen largo distinto, y por lo tanto $z_2 \notin L_1$.

Como estas son todas las descomposiciones que cumplen las condiciones $|vx|\geq1$ y $|vwx|\leq N$ y para cada una encontramos un i / $z_i \notin L_1$, entonces podemos afirmar que **L_1 no es Libre de Contexto.**

b) Se construye una Máquina de Turing

Idea de la MT: para cada símbolo en el string x de la izquierda, se lo marca y se busca y marca su correspondiente en el string x de más a la derecha. En la vuelta a la izquierda, se marca el símbolo correspondiente en x^r.



Ejercicio 2

Sea el lenguaje $L_2 = \{ x \,/\, x=a^j\, b^k\, c^l\, (\#b)^{j-k+l} \;/\; j > k \geq 0;\, l > 0 \}$

a) ¿Cuál es la tira de menor largo perteneciente a este lenguaje?
b) Construya una gramática G_2 apropiada / $L_2 = L(G_2)$.
c) Dé una derivación para la tira de la parte a).
d) Construya un autómata M_2 / $L_2 = L(M_2)$.¿Es determinista? Justifique.

Solución

a) La tira más corta que pertenece a este lenguaje es **ac#b#b**
Se obtiene con: j= 1; k=0; l=1

b) Como intuitivamente vemos que existe una relación entre las cantidades de símbolos de cada tipo, no es posible modelar ese comportamiento de las tiras con un patrón representado por una expresión regular.

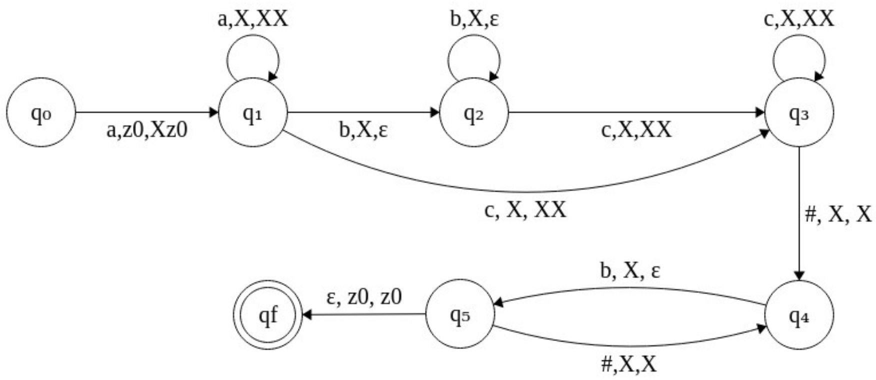
<u>Nota:</u> que NO se pide demostrar que el lenguaje NO es Regular, es sólo una forma de deducir el tipo de lenguaje.

Es por eso que se construye una gramática libre de contexto.

S → aS#b | XC#b
X → aXb | a
C → cC#b | c#b

c) S ⇒ XC#b ⇒ aC#b S ⇒ ac#b#b

d) Se construye entonces un autómata push-down que reconoce el lenguaje L_2



El autómata presentado es determinista porque para cada estado, entrada y tope de stack hay como máximo una transición posible.

Ejercicio 3

a) Sea el lenguaje L_3 dado por la expresión regular 01*2

i) Defina R_L y R_M para un lenguaje L cualquiera y un autómata M cualquiera.
ii) ¿Se cumple que 0 R_{L3} 011? Justifique.
iii) Construya un AFD M_3 / $L_3 = L(M_3)$ y para el cual **no** se cumpla que 0 R_M 011, justificando por qué las tiras no están relacionadas.

b) Construya un autómata de dos cintas que acepte el lenguaje de los pares de tiras
$\{ (a^{3n+p} b^m, b^p a^{2m+n}) / n, m, p > 0 \}$

Solución

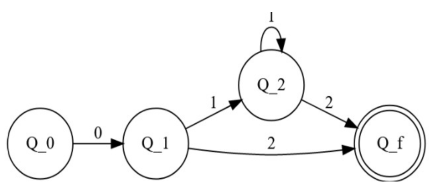
a)

i) x R_L y si $\forall z \in \Sigma^*$, $xz \in L \wedge yz \in L \vee xz \notin L \wedge yz \notin L$

x R_M y si al ser procesadas en el autómata M, x e y terminan en el mismo estado, es decir $\hat{\delta}(q_0,x) = \hat{\delta}(q_0,y)$

ii) Sí, ya que en ambos casos la tira pertenece a L_1 si y solo si le concateno una tira de L(1*2) a la derecha.

iii) En el siguiente autómata, 0 termina en Q_1 y 011 en Q_2, por lo que no se cumple 0 R_M 011:



b) Se construye una máquina de 2 cintas, y se comienza por la cinta 2