Teoría de Lenguajes

Soluciones

Ejercicio 1

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta.

a) Si L_{a1} es libre de contexto no regular y L_{a2} es finito y ambos definidos sobre el mismo alfabeto Σ, entonces $L_a = L_{a1} - L_{a2}$ es libre de contexto

Verdadero.

Por un lado,
$L_a = L_{a1} - L_{a2} = L_{a1} \cap L_{a2}^c$

Además,
L_{a2} es finito $\Rightarrow$ L_{a2} es regular $\Rightarrow$ L_{a2}^c es regular

y como L_{a1} es libre de contexto, se concluye que L_a es libre de contexto.

b) Dado el lenguaje $L_b = L(0^*11^*)$, se cumple que

i) $00\ R_{Lb}\ 01$
ii) $01\ R_{Lb}\ 111$

i) **Falso**

Contraejemplo: 01 ya que 0001 pertenece y 0101 no pertenece.

ii) **Verdadero**

c) Dados L_{c1} y L_{c2} lenguajes recursivamente enumerables NO libres de contexto:

i) $L_{c1} \cap L_{c2}$ puede resultar en un lenguaje regular.
Verdadero.

$L_{c1} = \{a^nb^nc^n : n \geq 0\}$
$L_{c2} = \{d^ne^nf^n : n \geq 0\}$

Entonces, $L_{c1} \cap L_{c2} = \{\varepsilon\}$ que es regular.

ii) $L_{c1} \cap L_{c2}$ puede resultar en un lenguaje libre de contexto no regular.
Verdadero.

$L_{c1} = \{a^nb^nc^n : n \geq 0\} \cup \{a^nb^n: n \geq 0\}$
$L_{c2} = \{d^ne^nf^n : n \geq 0\} \cup \{a^nb^n: n \geq 0\}$

Entonces, $L_{c1} \cap L_{c2} = \{a^nb^n: n \geq 0\}$ que es libre de contexto no regular.

iii) $L_{c1} \cap L_{c2}$ puede resultar en un lenguaje recursivamente enumerable no libre de contexto.
Verdadero.

Como la letra no dicen nada, se puede considerar $L_{c1} = L_{c2}$; con lo cual se cumple.

d) Si L_{d1} es un lenguaje libre de contexto no regular y L_{d2} es regular distinto de Σ^*, entonces $L_d = L_{d1} \cup L_{d2}$ es libre de contexto no regular.
Falso

Tomando
$L_{d1} = \{a^n b^m$, con n,m>0$\}$
$L_{d2} = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$

Se tiene que: $L_d = L_{d1} \cup L_{d2} = L_{d2}$ que es Regular.

Ejercicio 2

Sea $L_2 = \{w\#w'$ / $w \in L((0|1)^*)$ y w' es su complemento bit a bit$\}$

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

El lenguaje L_2 propuesto es recursivamente enumerable, lo que se demuestra en la parte b) dando una gramática irrestricta que lo genera o en la parte c) mediante una máquina de Turing que lo reconoce. No es un lenguaje libre de contexto, lo cual se prueba aplicando el contra-recíproco del Pumping Lema para lenguajes libres de contexto.
Dado N, elegimos para el pumping la tira $Z= 1^N 0^N \# 0^N 1^N$. Tenemos que $|Z| = 4N+1 > N$, y además se cumple que $Z \in L_2$ ya que la tira después del numeral es el complemento bit a bit de la tira previa.
Analizamos las descomposiciones de z = uvwxy y consideramos aquellas familias que cumplen las condiciones $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq N$. Toda descomposición pertenece a una de trece familias posibles:

familia	1^N	0^N	#	0^N	1^N
1	v x				
2	v x	x			
3	v	x			
4	v	v x			
5		v x			
6		v x	x	x	
7		v		x	
8		v	v	v x	
9				v x	
10				v x	x
11				v	x
12				v	v x
13					v x

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Familia 1:
$u = 1^p$
$v = 1^q$ $\quad q+s >= 1$
$w = 1^r$ $\quad q+r+s <=N$
$x = 1^s$
$y = 1^{N-p-q-r-s}0^N\#0^N1^N$

$z_i = 1^{N+(q+s)(i-1)}0^N\#0^N1^N$
$z_0 = 1^{N-(q+s)}0^N\#0^N1^N$
Como q+s >= 1 , el largo de la primera secuencia de 1's y 0's antes de # es menor estricto que el largo de la secuencia de 0's y 1's después de #, por lo que no pueden ser complementarias, y por lo tanto $z_0 \notin L_2$.

Familias 2 ,3,4,5:
Se demuestran con el mismo argumento que la familia 1, tomando i = 0, en todos los casos quedan menos símbolos a la izquierda de # que a la derecha y por lo tanto $z_0 \notin L_2$.

Familias 9,10,11,12 y 13:

Se demuestran en forma análoga a la famila 1, tomando i = 0, cumpliéndose en todos estos casos que la cantidad de símbolos a la derecha del # queda estrictamente menor que la cantidad de símbolos a la izquierda, y por lo tanto $z_0 \notin L_2$.

Familia 6:
$u = 1^N0^{N-p-q-r}$
$v = 0^p$ $\quad p+r+1+s >= 1$
$w = 0^q$ $\quad p+q+r+s+1 <=N$
$x = 0^r\#0^s$
$y = 0^{N--s}1^N$

$z_i = 1^N 0^{N+p(i-1)-r} (0^r\#0^s)^i 0^{N--s}1^N$
$z_0 = 1^N 0^{2N-p-r-s}1^N$
A z_0 le falta el #, por lo que $z_0 \notin L_2$.

La familia **8** se demuestra en forma análoga.

Familia 7:
$u = 1^N0^{N-p-q}$
$v = 0^p$ $\quad p+s >= 1$
$w = 0^q\#0^r$ $\quad p+q+r+s+1 <=N$
$x = 0^s$
$y = 0^{N-r-s}1^N$

$z_i = 1^N 0^{N+p(i-1)} \#0^{N+s(i-1)}1^N$
$z_0 = 1^N 0^{N-p}\#0^{N-s}1^N$
Como p+s >= 1, debe ser p>0 y/o s>0.
Caso p>0: N-p < N, lo que implica que la cantidad de 0´s en la secuencia de ceros antes de # es menor que la cantidad de 1´s en la secuencia de 1´s después de #, y por lo tanto no son complementarias bit a bit, lo que indica que $z_0 \notin L_2$.
Caso s>0: N-s < N, lo que implica que la cantidad de 0´s en la secuencia de ceros después de # es menor que la cantidad de 1´s en la secuencia de 1´s antes de #, y por lo tanto no son complementarias bit a bit, lo que indica que $z_0 \notin L_2$.

Como estas son todas las descomposiciones que cumplen las condiciones $|vx|\geq 1$ y $|vwx|\leq N$ y para cada una encontramos un i / $z_i \notin L_2$, entonces podemos afirmar que **L_2 no es Libre de Contexto.**

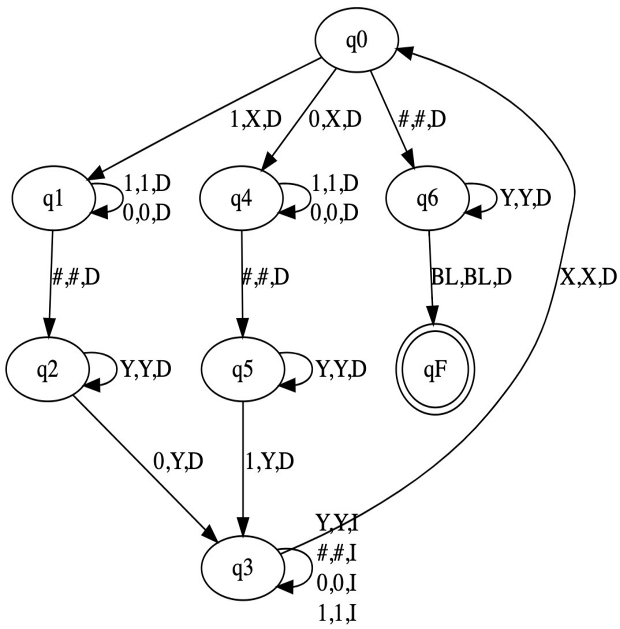
b) Construya una gramática G_2 / $L(G_2) = L_2$

El lenguaje NO es libre de contexto, con lo cual se construirá una gramática irresticta para ver que es recursivamente enumerable.

Una posible gramática G_2 podría tener las siguientes reglas de producción:

S → S' F
S' → 0 S' U | 1 S' C | #E
UF → 1F
CF → 0F
U1 → 1U
U0 → 0U
C1 → 1C
C0 → 0C
E1 → 1E
E0 → 0E
EF → ε

c) Construya un autómata M_2 / $L(M_2) = L_2$. ¿Es determinista? Justifique.



La MT M_2 construida es determinista. Para cada par de <estado,símbolo_de_la_cinta> existe una sola acción posible.

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 3

El siguiente pseudocódigo forma strings a partir de un entero **repeticiones** y al final los imprime.

```
función  generador_de_tiras(repeticiones)
        tira = inicialDeDia() + ":"  // "l" si es Lunes, "m" si es Martes o Miércoles
                                                                          etc.
        para todo i en [1...repeticiones]
                b = random() // b será un entero cualquiera
                if mod(b,2)==0
                        tira = tira + "0" + ":"  // Concatena a la variable tira, "0" y ":"
                else
                        tira = tira + "1" + ":" // Análogo
                end
        end
        print(tira)
```

a) El lenguaje L_1 contiene todas las tiras que comienzan con la inicial de un dia y luego secuencias de 0s o 1s separados por dos puntos (":").

Ejemplos:
l:0:1:
j:1:
v:

b) Σ= {l,m,j,v,s,d, 0,1, :}

c) Sí, el lenguaje es Libre de Contexto porque es regular. El hecho de que sea regular será probado en la siguiente parte al dar una gramática que lo genere.

d) Dado que el lenguaje es regular, se dará una gramática lineal derecha.

S → l: A | m: A | j: A | v: A | s: A | d: A
A → epsilon | 0: A | 1: A

La gramática no está simplificada dado que tiene producciones epsilon.

Eliminando la produccion-ε queda:

S → l: A | m: A | j: A | v: A | s: A | d: A
| l: | m: | j: | v: | s: | d:
A → 0: A | 1: A
| 0: | 1:

e) El lenguaje quedaría Libre de Contexto no-regular, dado que se genera una dependencia entre la cantidad de 0s, 1s y ":" con respecto a la cantidad de #; es la misma.

Quedan generadas tiras del estilo:
d:0:1:## (si el parámetro "repeticiones" es = 2)
m:1:1:1:0:#### (si el parámetro "repeticiones" es = 4)

Sea el homomorfismo h: Σ ∪ {#} → {a,b} de forma tal que:
h(l)=h(m)=h(j)=h(v)=h(s)=h(d)=h(:)= ε
h(0)=h(1)=a
h(#)=b

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Entonces h(*d:0:1:*)=aa
h(##)=bb
y entonces $h(w)=a^k b^k$
Finalmente, $h(L_3) = \{a^k b^k, k \geq 0\}$ el cual se probó en teórico que NO es Regular.

Ejercicio 4

Sea el siguiente lenguaje $L_4 = \{xy \ / \ |x|=2k, |y|=t+k \text{ con } t,k>0, x \in \{a,b\}^*, y \in \{b\}^*\}$

a) Clasifique L_4 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

L_4 es Libre de Contexto, lo cual se demuestra con la G.L.C. de la parte b) o con el A.P.D. de la parte c). Demostraremos que no es Regular, aplicando el contrarrecíproco del Pumping Lemma para lenguajes regulares.

Sea N la constante del Pumping Lemma, elegimos $z = a^{2N}b^{N+1} \in L_4$, $|z|=3N+1$.
Consideramos todas las descomposiciones de z = wxy, tal que: $|wx| \leq N$ y $|x|>0$

Caso	a^{2N}	b^{N+1}
1	wxy	y

<u>Caso 1</u>

$w = a^p$ $\quad$ $p+q \leq N$
$x = a^q$ $\quad$ $q > 0$
$y = a^{2N-p-q}\, b^{N+1}$

$z_i = a^p\,(a^q)^i\, a^{2N-p-q}\, b^{N+1}$
Si elegimos i = 2, $z_2 = a^p\, a^{2q}\, a^{2N-p-q}\, b^{N+1} = a^{2N+q}\, b^{N+1} \notin L_4$, dado que no se cumple que la cantidad de “b” al final de la tira sea mayor que la mitad de la cantidad de “a” del principio.

Como estas son todas las descomposiciones posibles de z en wxy que cumplen: $|wx| \leq N$ y $|x|>0$, por el CR del PL 1 concluimos que L_4 no es regular.

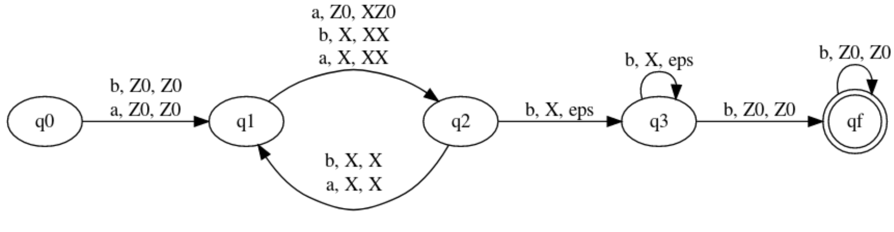
b) Construya una gramática G_4 / $L(G_4) = L_4$.

Una posible gramática G_4, podría ser una con las siguientes reglas de producción:

S → abSb | baSb | aaSb | bbSb | abBb | baBb | aaBb | bbBb
B → b | bB

c) Construya un autómata M_4 / $L(M_2) = L_4$. ¿Es determinista? Justifique.

Un posible APD M_4, podría ser el siguiente:



M_4 es un APD no determinista, dado que desde q2 salen dos transiciones con el mismo símbolo y el mismo tope en el stack, que van hacia dos estados diferentes.