Teoría de Lenguajes
Teoría de la Programación I
Soluciones

Ejercicio 1

a) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente cada respuesta.

i) L_1 = {w / w es una palabra en español} es un lenguaje Libre de Contexto.
ii) Existe una Máquina de Turing M_1 / $L_1 = L(M_1)$; siendo L_1 el lenguaje de la parte i).
iii) Si L_2 y L_3 son finitos, distintos y $L_2 \subseteq \Sigma^*$, $L_3 \subseteq \Sigma^*$ entonces $L_2^c \cap L_3^c$ es finito.
iv) Si L_4 y L_5 son libres de contexto NO regulares y distintos, entonces $L_4 \cup L_5$ puede ser regular.
v) Si L_6 y L_7 son NO regulares, distintos y L_6, $L_7 \subseteq \Sigma^*$, entonces $L_6 \cap L_7$ puede ser regular.
vi) Si L_6 y L_7 son NO regulares, distintos y L_6, $L_7 \subseteq \Sigma^*$, entonces $L_6 \cap L_7$ puede no ser regular.

i) **Verdadero**. El lenguaje L_1 está formado por el conjunto de las palabras del idioma español, el cual tiene un número finito de palabras. Puede considerarse como base las que se encuentran en la RAE, que son unas 88.000 aprox. Podría escribirse entonces una ER con el "pipe" de cada una palabra; por lo tanto Regular. Por Jerarquía de Chomsky es también Libre de Contexto.

ii) **Verdadero**. Por la parte i), el lenguaje L_1 es Regular, y por Jerarquía de Chomsky Libre de Contexto y Recursivamente Enumerable. Entonces existe una MT que lo reconoce, por ser el modelo de autómatas asociado a los RE.

iii) **Falso**. Sean $L_2 = \{\varepsilon\}$ y $L_3 = \{a\}$, siendo $\Sigma = \{a,b\}$
Entonces $L_2^c = \Sigma^+$ y $L_3^c = \Sigma^* - \{a\}$ de donde $L_2^c \cap L_3^c = \Sigma^+ - \{a\}$ que claramente es infinito.

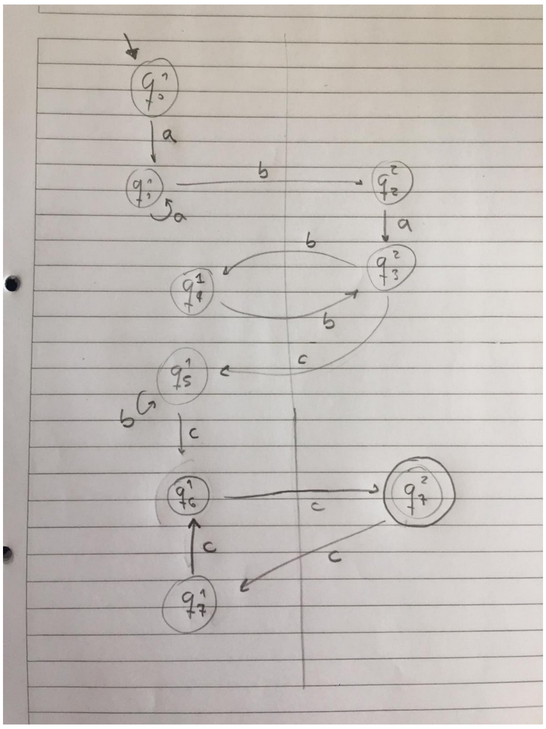
iv) **Verdadero**. Sean $L_4 = \{a^k b^t \ / \ k > t \geq 0\}$ y $L_5 = \{a^r b^j \ / \ 0 \leq r \leq j\}$, siendo $\Sigma = \{a,b\}$.
Se tiene que $L_4 \cup L_5 = L(a^*b^*)$, que es un lenguaje Regular.

v) **Verdadero**. Sean $L_6 = \{a^k b^{k+1} \ / \ k \geq 0\}$ y $L_7 = \{a^j b^j \ / \ j \geq 0\}$, siendo $\Sigma = \{a,b\}$.
De donde $L_6 \cap L_7 = \{\varepsilon\}$ que es un Lenguaje Regular.

vi) **Verdadero**. Sean $L_6 = \{a^k b^k c^t \ / \ k,t \geq 0\}$ y $L_7 = \{a^j b^r c^r / \ j,r \geq 0\}$, siendo $\Sigma = \{a,b,c\}$.
De donde $L_6 \cap L_7 = \{a^k b^k c^k \ / \ k \geq 0\}$ que es un Lenguaje No Libre de Contexto y por Jerarquía de Chomsky tampoco es Regular.

[Teoría de Lenguajes]

b) Construya un AFD-2cintas que reconozca $L_b = \{(a^k b^t c^{2s}, ab^p c^s)$, con $k>0$, $p<t$, $s>0\}$



[Teoría de la Programación 1]

b) Sea el conjunto $B = \{<i,m> \ / \ \forall n,\ Ix(i,n)\downarrow$ en al menos m pasos$\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

i. B no es r.e.
ii. B No es decidible

i. **Verdadero.**

Supongamos que B es r.e. $\Rightarrow$ la función característica parcial de B es computable. Sea MB una macro que la computa.

Construyo el siguiente programa:

```
PROGRAM(X0)
     X1:=MB(<X0,0>);
RESULT(X1)
```

Si un programa para con toda entrada, para con toda entrada en al menos 0 pasos. El programa anterior verifica esta condición.
Pero entonces, este programa computa la función característica parcial de **TOT**, y esto es absurdo.

ii. **Verdadero.**

Por la parte (i) B no es r.e. $\Rightarrow$ B no es decidible.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

Ejercicio 2

Sea el siguiente lenguaje L_2 = {x / x es de la forma $\#a^{k+j}\#b^p\#c^{2k+p}\#$ con k,p>0 j≥0 }

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.
b) Construya una gramática G_2 / $L(G_2)$ = L_2.
c) Construya un autómata M_2 / $L(M_2)$ = L_2. ¿Es determinista? Justifique.

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky. Justifique.

L_2 es Libre de Contexto NO Regular. Se demuestra por el contrarecíproco del Pumping Lema para lenguajes regulares. Por otro lado, se justifica que es Libre de Contexto construyendo una gramática Libre de Contexto en la parte b), o por el APD de la parte c).

Dada N cte. del PL se elige z = $\#a^N\#b\#c^{2N+1}\#$ perteneciente L_2 |z|=3N+6.

Analizamos las posibles descomposiciones de z en uvw, con |uv|≤N y |v|≥1:

Caso1

u= ε
v=$\#a^p$ p≥0, p<N
w=$a^{N-p}\#b\#c^{2N+1}\#$

$z_i=(\#a^p)^i\, a^{N-p}\#b\#c^{2N+1}\#$

Para i=0 $z_0=a^{N-p}\#b\#c^{2N+1}\#$ la cual no pertence a L_1, porque falta el "#" del comienzo de tira.

Caso2

u=$\#a^p$ p+q<N
v=a^q q≥1
w=$a^{N-p-q}\#b\#c^{2N+1}\#$

$z_i=\#(a^q)^i a^{N-q}\#b\#c^{2N+1}\# = \#a^{N+(i-1)q}\#b\#c^{2N+1}\#$

Para i=2 $z_2=\#a^{N+q}\#b\#c^{2N+1}\#$ la cual no pertenece a L_1, porque:
- la cantidad de b's se mantiene constante en 1
- la cantidad de c's debiera ser el doble de la cantidad de a's + la cantidad de b's (1)
- la cantidad de a's = N+q y el doble es 2N+2q

donde sacando la c que se corresponde con la b (fijas) el resto de esas c's (2N) < 2N+2q porque q≥1

Estos casos son los únicos que cumplen las condiciones |uv|≤N y |v|≥1 entonces L_2 NO es Regular.

Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.

b) Se verá que es Libre de Contexto, construyendo una gramática G_2 / L_2 =L(G_2) con las siguientes reglas de producción:

$S \rightarrow \# S' \#$ % comienza y termina en #

$S' \rightarrow a S' cc$ % genero las a^k y c^{2k}

$\quad | \; a X cc$ % k>0, por eso al menos una a

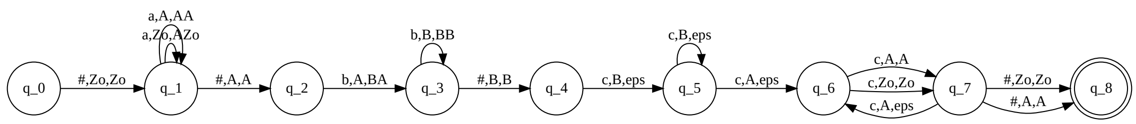
$X \rightarrow aX$ % se generan las j a's

$\quad | \; \# R$ % j ≥0 y genero el # entre a's y b's

$R \rightarrow b R c$ % genero b^p y c^p

$\quad | \; b \# c$ % p>0 y genero el # entre b's y c's

c) Se construye un APD con el siguiente diagrama de estados



Es un APD que reconoce por estado final.
Notar que pueden quedar a's en el stack debido a que se corresponden con las j a's que pueden haber sido agregadas al stack al comienzo.

Además es un APD Determinsta, ya que:
- $|\delta(q,a,X)| \leq 1$
- no contiene transiciones epsilon

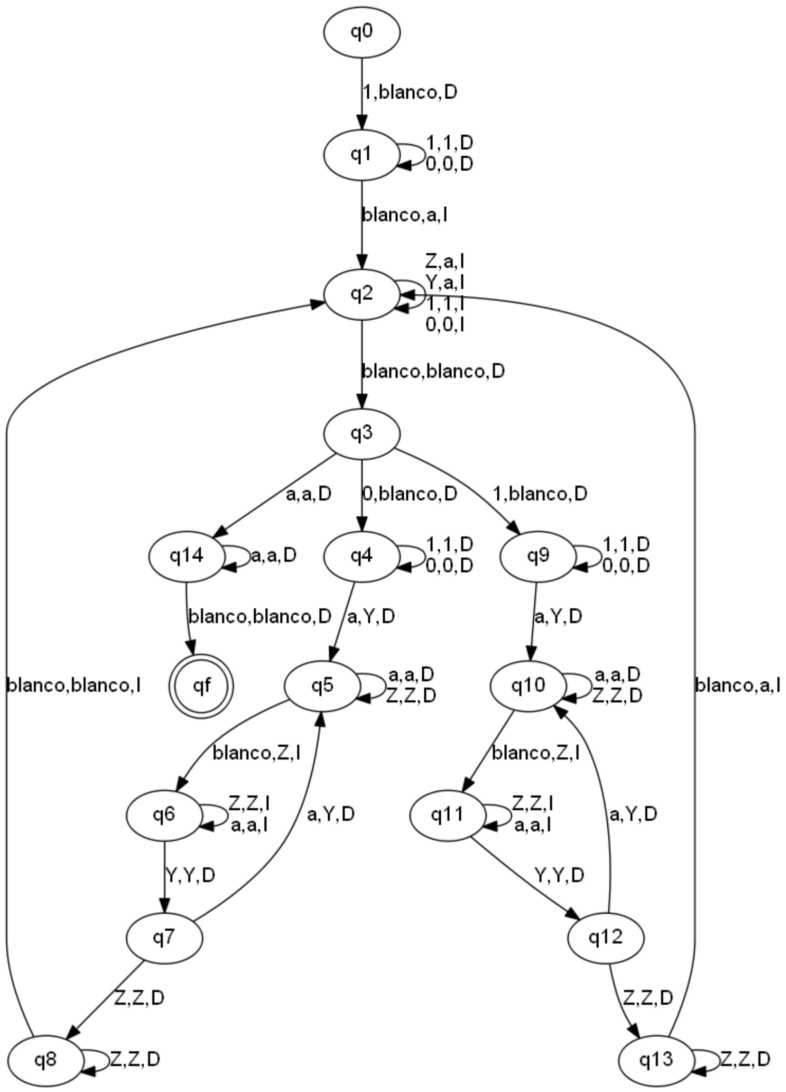
Ejercicio 3

Sea una función ***f*** : {1,0}* → a* / ***f*** (w) = x siendo w la representación binaria de un entero n ≥ 1 (sin ceros no significativos), y x es una tira de a's de manera que |x| sea ese número binario.
Ejemplos:

1 → a
101 → aaaaa
1000 → aaaaaaaa

Construya una MT que compute la función ***f***.

La idea de la MT es procesar los bits de w de izquierda a derecha, empezando desde el más significativo, y por cada bit leido en la entrada ir duplicando las a's en la salida. Además si el bit de w leido es un 1, se agrega una a adicional a la salida. Para hacer la duplicación de las a's, se emplean símbolos auxiliares Y's y Z's.



Nota: Las gramáticas y los autómatas deben corresponderse con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas así como una breve explicación de éstas. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.