Teoría de Lenguajes
Soluciones

Ejercicio 1 [8 puntos]

a) Sea una gramática G_1=(V,T,P,S) / V={S,X} T={a,b} P={ S → aSb , S → aXb ,
X → bXa , X → ε }

i) Defina $L_1 = L(G_1)$

L_1 = {w / w es de la forma $a^m b^n a^n b^m$ con m>=1,n>=0}

ii) Demuestre por Inducción Completa que *Si w L_1 entonces S ⇒* w*

Definimos el lenguaje L_x = {x / x es de la forma $b^n a^n$ con n>=0}

Se plantean las siguientes propiedades que se probarán por IC :
P1) Si w ϵ L_1 entonces S =>* w
P2) Si x ϵ L_x entonces X =>* x

Observamos primero que todas las tiras tanto de L_2 como de L_x tienen largo par (|w|=2(m+n) en el caso de L_1 y (|x|=2n en el caso de L_x).

La inducción completa se hace en forma conjunta sobre el largo de las tiras de ambos lenguajes, y considerando que son tiras de largo par.

Paso Base: consideramos las tiras más cortas de ambos lenguajes.

PB1) La tira más corta de L_2 es w = ab, correspondiente a m =1 y n = 0.
Teniendo en cuenta las producciones de G_1 se tiene:
S => aXb => ab = w y se cumple S=>*w

PB2) La tira más corta de L_x es x = ε, correspondiente a n = 0.
Teniendo en cuenta las producciones de G_1 se tiene X => ε = x

Paso Inductivo
HI1) Si w ϵ L_1 y |w| <= 2h entonces S =>* w
HI2) Si x ϵ L_x y |x| <= 2h entonces X =>* x

TI1) Si w ϵ L_1 y |w| = 2(h+1) entonces S =>* w
TI2) Si x ϵ L_x y |x| = 2(h+1) entonces X =>* x

Demostración.

TI1) Sea w ϵ L_1 y |w| = 2h+2.
Por definición de L_1 , w = $a^m b^n a^n b^m$ con m>=1, n>=0.
Consideramos 2 casos:

a) m = 1
Se verifica que w = $ab^n a^n b$ con n=h → w = ax_1b con $x_1 = b^n a^n$.
| x_1| = 2n = 2h y x_1 ϵ L_x pues n>=0 → por HI2) X =>* x_1
S => aXb =>* a x_1b = w y por lo tanto S =>* w

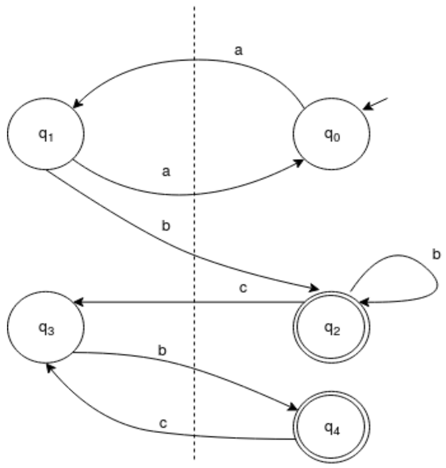
b) m > 1
Se tiene que w = $a^m b^n a^n b^m$ con m > 1, n>=0 → w = aw_1b con
$w_1 = a^{m-1} b^n a^n b^{m-1}$
w_1 ϵ L_1 pues m-1>=1 y | w_1| = 2h → por HI1) S =>* w_1

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow^* a\, w_1 b = w$ y por lo tanto $S \Rightarrow^* w$

TI2) Sea $x \in L_x$ y $|x| = 2h+2$.
Por definición de L_x, $x = b^n a^n$ con $|x| = 2n = 2h+2 \rightarrow n = h+1 >= 1$.
x se puede escribir como $x = b\, x_1 a$ con $x_1 = b^{n-1}a^{n-1}$.
$x_1 \in L_x$ pues $n-1>=0$ y $|x_1| = 2h$ → por HI2) $X \Rightarrow^* x_1$
→ $X \Rightarrow bXa \Rightarrow^* b\, x_1 a = x$ y por lo tanto $X \Rightarrow^* x$

Por el principio de IC quedan demostradas ambas propiedades.
En particular la propiedad P1) es lo que se quería probar.

b) Construya un Autómata Finito de 2 cintas que reconozca el siguiente lenguaje:
$L_{1b} = \{(a^{n-1}b^m, a^n b^k c^{m-1}),$ con $n,m>0, k\geq 0\}$



Ejercicio 2 [12 puntos]
Sea el lenguaje
$L_2 = \{ x \,/\, x \in \{a,b,c\}^*$ y es de la forma $a^p\, b^j\, c^m$ con $m \geq 0, j>0, p=2^m\}$

a) Clasifique L_2 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje L_2 es Recursivamente Enumerable lo cual se demuestra con la construcción de la GI y ahora veremos que no es Libre de Contexto usando el contra-recíproco del P.L. para Lenguajes Libres de Contexto.

Dado N, elegimos $z = a^{2^N} b c^N \in L_2$, tal que $|z| = 2^N + N + 1 \geq N$
Estudiamos todas las descomposiciones de $z = uvwxy$ / $vwx \leq N$ y $vx>0$

Familia	a^{2^N}	b	c^N
1	vx		
2	vx	x	x
3	v	v	vx
4	v		x
5			vx

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Familia 1
$u = a^p$
$v = a^q$ $q+s>0$
$w = a^r$ $q+r+s \leq N$
$x = a^s$
$y = a^{2\wedge N-p-q-r-s}bc^N$

$z_i = a^p (a^q)^i a^r (a^s)^i a^{2\wedge N-p-q-r-s}bc^N = a^{2\wedge N(q+s)(i-1)}bc^N$
con i=0 $z_0=a^{2\wedge N -(q+s)}bc^N$, como $q+s>0$ la cant_a(z_0) < 2^cant_c(z_0), por lo tanto $z_0 \notin L_2$

Para la **Familia 5** el razonamiento es similar, sólo que al elegir i=0 se cumple cant_a(z_0) > 2^cant_c(z_0) con lo que $z_0 \notin L_2$

Familia 2
$u = a^{2\wedge N-p-q-r}$
$v = a^p$ $p+r+t+1 >0$
$w = a^q$ $p+q+r+t+1 \leq N$
$x = a^r bc^t$
$y = c^{N-t}$

$z_i = a^{2\wedge N-p-q-r} (a^p)^i a^q (a^r bc^t)^i c^{N-t}$ donde con i=0 el problema es que z_0 no contiene al menos una **b**, por lo tanto $z_0 \notin L_2$

Familia 3
El estudio de ésta Familia es análogo al de la Familia 2 y con la misma justificación.

Familia 4
$u = a^{2\wedge N-p-q}$
$v = a^p$ $p+s>0$ (asumimos p>0, sino estamos en la Familia 5)
$w = a^q bc^t$ $p+q+1+t+s \leq N$
$x = c^s$
$y = c^{N-t-s}$

$z_i = a^{2\wedge N-p-q} (a^p)^i a^q bc^t (c^s)^i c^{N-t-s} = a^{2\wedge N+(i-1)p}bc^{N+(i-1)s}$

donde con i=0 $z_0 = a^{2\wedge N-p}bc^{N-s}$

Se intentará demostrar que $2^N- p$ (que es la cantidad de a's) NO es potencia de 2

Se cumple que (la cantidad de a's) $2^N- p < 2^N$ y por otro lado hay que ver que $2^{N-1} < 2^N- p$

$p < 2^N - 2^{N-1} = 2^{N-1}(2-1) = 2^{N-1}$ y se tiene que $p \leq N$ (por restricción de descomposiciones del PL) y a su vez podemos afirmar que $N<2^{N-1}$ $\forall N >2$, de donde $2^{N-1} < 2^N- p < 2^N$ y por tanto $\nexists$ p donde la potencia de la cantidad de c's sea igual que la cantidad de a's y por lo tanto $z_0 \notin L_2$

Como estas son todas las descomposiciones posibles que cumplen $|uwx| \leq N$ y $|vx|>0$, se concluye que L_2 NO es un Lenguaje Libre de Contexto.

b) Construya una gramática G_2 / L_2 = $L(G_2)$.

Ahora se construye una Gramática Irrestricta y se comprueba que es Recursivamnete Enumerable

S → I A T
T → X T c | F B // se colocan igual X que c's

B → bB | b // tantas b's como se quiera. Al menos una.

AX → XAA //cada A que se genera es duplicada

IX → I // si una X llega hasta la I ya duplicó todo lo que tenía para duplicar y por tanto se elimina

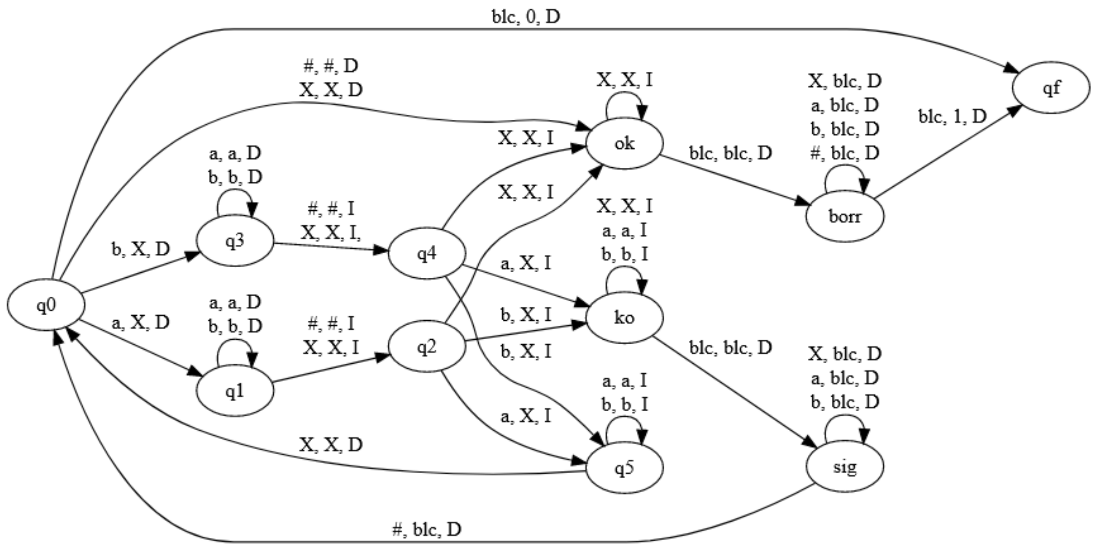
AF → Fa // la F atravesará solo símbolos 'a'

IF → ε // al encontrarse I y F, ya se terminó de procesar toda la potencia 2

Ejercicio 3 [8 puntos]
Construya una Máquina de Turing que compute una función que recibe una tira formada por secuencias (eventualmente vacías) de a's y b's separadas por un # y devuelve 1 si existe al menos una de las secuencias que sea palíndromo y 0 si ninguna de ellas lo es.
Ejemplos:

aba#ba#	1
bbba#ab#ba#	0
ab#ba##	1
ababba#bba#ab#abb#	0
#aabbaa#abb#baab#	1

<u>Nota:</u> al final, en la cinta sólo debe estar la respuesta (0 ó 1)



Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

Ejercicio 4 [12 puntos]
Sea el lenguaje

$L_4 = \{ x \;/\; x \text{ es de la forma } a^{k-1}b^{(k-1) \text{ MOD } 3}a^k \text{ con } k>0 \}$

a) Clasifique L_4 según la Jerarquía de Chomsky.

El lenguaje es LLC no regular, para probarlo primero demostraremos que no es un LR con el contrarrecíproco del Pumping Lemma y luego con las partes b) y c) pruebo que el lenguaje es LLC no regular.

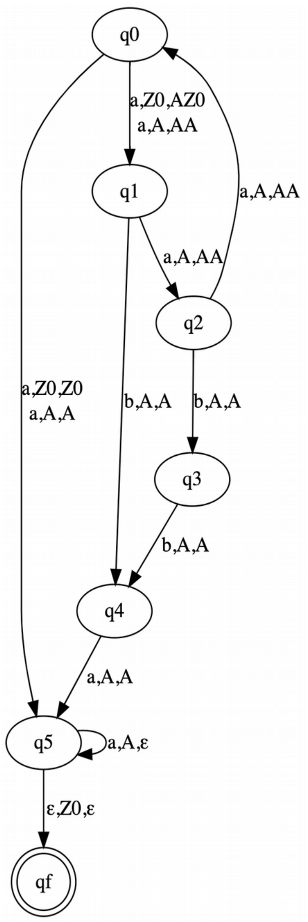
Sea N la constante del PL, y sea $z=a^{3N+1}b\,a^{3N+2}$ donde $|z| = 6N+2 \geq N$
Consideramos todas las descomposiciones posibles para z = uvw que cumplan:
$|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$
Analizamos la familias de descomposiciones:
Familia 1

$u=a^p$ $p\geq 0$
$v=a^q$ $q>0$
$w= a^{3N+1-p-q}\ b\ a^{3N+2}$

$z_i= a^p(a^q)^i\ a^{3N+1-p-q}b\ a^{3N+2}$ y tomando i=2 queda $z_2 = a^{3N+1+q}b\,a^{3N+2}$ que $\notin L_4$ porque la cantidad de a's antes de la b's difieren en más de una a ya que q>0.

Como estas son todas las familias que cumplen $|uv| \leq N$ y $|v|\geq 1$ de donde L_4 NO es un lenguaje regular.

b)



El Autómata NO es Determinista, ya que existe por ejemplo:
$\delta(q_0,A,Z_0) = \{(q_1,AZ_0),(q_5,Z_0)\}$

Nota: Las gramáticas y los autómatas **deben corresponderse** con el tipo del lenguaje considerado en cada caso, según la Jerarquía de Chomsky. Se valora positivamente la simplicidad de las soluciones propuestas, así como una breve explicación de éstas. **Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas.**

c) Construya una gramática G_4 / $L_4 = L(G_4)$. ¿Se encuentra G_4 simplificada?

S → aS1a | a
S1 → aS2a | ba
S2 → aSa | bba

Esta gramática está simplificada ya que todos sus símbolos son útiles y no contiene ni producciones épsilon ni unitarias