Universidad de la República — **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL — **Primer Semestre 2019**

Solución del Segundo Parcial
Sábado 29 de Junio de 2019

VERSIÓN	Empieza con:	MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
1	Taylor	A	B	A	D	C
2	Integral	C	D	B	B	A
3	Cadena	B	A	C	D	D

Solución Múltiple Opción

Taylor en $\mathbb{R}^n$
Calculamos las derivadas parciales de primer y segundo orden:
$f_x(x,y) = ln(1+x+2y) + \frac{x}{1+x+2y}$, $f_x(0,0) = 0$
$f_y(x,y) = \frac{2x}{1+x+2y}$, $f_y(0,0) = 0$
$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{1+x+2y} + \frac{1+2y}{(1+x+2y)^2}$, $f_{xx}(0,0) = 2$
$f_{xy}(x,y) = \frac{2+4y}{(1+x+2y)^2}$, $f_{xy}(0,0) = 1$
$f_{yy}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x+2y)^2}$, $f_{yy}(0,0) = 0$

Luego, $p(\Delta x, \Delta y) = \Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y$ y $p(2,1) = 4 + 4 = 8$

Regla de la Cadena
Sean $f_1(x,y) = x^2y + e^x$, $f_2(x,y) = y^3x$ y $f_3(x,y) = sin(y)$, tenemos que
$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$
Luego,
$\frac{\partial h}{\partial y}(0,\pi/2) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(0,\pi/2))\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,\pi/2) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(0,\pi/2))\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,\pi/2) + \frac{\partial g}{\partial z}(f(0,\pi/2))\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,\pi/2)$
Considerando que $f(0,\pi/2) = (1,0,1)$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,\pi/2) = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,\pi/2) = 0$ y $\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,\pi/2) = 0$, tenemos que $\frac{\partial h}{\partial y}(0,\pi/2) = 0$

Extremos Relativos
En primer lugar calculemos los puntos críticos de f, es decir los puntos que anulan el gradiente.

$$f_x = 3x^2 + ay = 0$$

$$f_y = 3y^2 + ax = 0$$

Restando las ecuaciones obtenemos que

$$0 = 3(x^2 - y^2) + a(y - x) = 3(x+y)(x-y) + a(y-x) = 0 \Rightarrow 3(x+y)(x-y) = a(x-y) \quad (*)$$

Si $x-y=0$ entonces $x=y$ y sustituyendo en la ecuación $f_x=0$ obtenemos $0=3x^2+ax=x(3x+a)$. Por lo tanto o bien $x=0$ o bien $x=\frac{-a}{3}$. Así obtenemos los puntos $(0,0)$ y $(\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})$. Si $x-y\neq 0$ en $(*)$ obtenemos que $3(x+y)=a$, por lo tanto $x=\frac{a}{3}-y$. Sustituyendo en la ecuación $f_y=0$ obtenemos un polinomio de segundo grado en y que no tiene raíces reales, por lo tanto no hay más puntos críticos que los ya mencionados. La matriz Hessiana de f es

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & a \\ a & 6y \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

El $\det H_f(0,0)=-a^2<0$ y por lo tanto f tiene en $(0,0)$ un punto silla. Por otro lado

$$H_f(\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})=\begin{pmatrix} -2a & a \\ a & -2a \end{pmatrix}$$

El $\det H_f(\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})=3a^2>0$ y $\operatorname{tra} H_f(\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})=-4a<0$ si $a>0$. Por lo tanto si $a>0$, f tiene en $(\frac{-a}{3},\frac{-a}{3})$ un máximo relativo.

Integrales Múltiples

Utilizando el cambio de variable $u=x+1$, $v=y+1$, tenemos que

$$\iint_B (x^2+y^2)dxdy=\iint_{B'}((u-1)^2+(v-1)^2)dudv=\iint_{B'}(u^2+v^2-2u-2v+2)dudv,$$

Donde $B'=B((0,0),1)$. Utilizando cambio de variable a polares:

$$\begin{aligned}\iint_{B'}(u^2+v^2-2u-2v+2) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1(\rho^3-2\rho^2cos(\theta)-2\rho^2sin(\theta)+2\rho)d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(\frac{5}{4}-\frac{2}{3}(cos(\theta)+sin(\theta))d\theta=\frac{5\pi}{2}\end{aligned}$$

Límites y Continuidad

Veamos si f es continua en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2+x^4y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+\frac{x^4y^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+(\frac{x^2}{x^2+y^2})x^2y^4=1\end{aligned}$$

Como el límite no coincide con $f(0,0)$, f no es continua en $(0,0)$. Además $f(x,y)>0$ para todo $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$ por lo tanto f tiene en $(0,0)$ un mínimo absoluto.

Solución del Desarrollo.

Problema 1

1. Puesto que $f(x,y) = y - x$ si $y \geq x$, si existen las derivadas parciales en $(0,0)$ deben ser $f_x(0,0) = -1$ y $f_y(0,0) = 1$. Tomando límite para la porción $y < x$ se ve que:
   $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = -1$, y
   $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 1$.
   Luego las derivadas parciales existen, y valen $f_x(0,0) = -1$ y $f_y(0,0) = 1$.

2. Para probar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ tenemos que calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-d_f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   Para la porción $y \geq x$ este límite es 0. Si $y < x$ tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left(\frac{2x^3y}{x^2+y^2} + y - x - (-x+y) \right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \underbrace{\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{acot}} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{acot}} = 0.$$

3. En el caso de usar la expresión $f(x,y) = y - x$, esta es una transformación lineal y por tanto diferenciable. Usando lo anterior el plano tangente resulta $\pi : z = y - x$.

Problema 2

Consideramos el siguiente cambio de variable: $x = 2\rho\cos\theta, y = 5\rho\sin\theta, z = z$.
Las restricciones ahora son $0 < \theta < \pi$, $\rho \leq \sqrt{z}$ y $0 \leq z \leq 1$, pues z no toma valores negativos.
Notar que el jacobiano de este cambio de variable vale 10ρ. Entonces:

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{z}} 10\rho \, d\rho \, dz \, d\theta = 5\pi/2.$$