PRÁCTICO Nº 9

Introducción

El objetivo de este práctico es profundizar la comprensión de la metodología de programación llamada recursión, en primera instancia con ejercicios de sistema de numeración y luego con ejercicios de dificultad superior.

Ejercicio 1

Definimos *sumRestDig* de un número entero positivo al número que se obtiene de sumar sus dígitos de posición impar y restar sus dígitos de posición par (el dígito de posición 1 es el que está más a la derecha).

Ej.: el número *sumRestDig* de 2694517 es 12 pues +2-6+9-4+5-1+7 = 12

Escriba una función recursiva para obtener el número *sumRestDig* de un entero positivo dado.

Ejercicio 2

Implemente una función recursiva *decimalABinario* que reciba un valor entero (decimal) y devuelva su equivalente en sistema binario en un vector.

> Ejemplo: 47 en binario es 101111
> paso 1: 47 / 2 = 23 resto 1
> paso 2: 23 / 2 = 11 resto 1
> paso 3: 11 / 2 = 5 resto 1
> paso 4: 5 / 2 = 2 resto 1
> paso 5: 2 / 2 = 1 resto 0

Ejercicio 3

Implemente la función recursiva *binarioADecimal* que tome un natural binario (≥0) representado como un vector de ceros y unos, y retorne el decimal correspondiente.

Ejercicio 4

Escriba una función recursiva *aBase10* que reciba como parámetros un número entero positivo N expresado en base b y la base b, y devuelva su equivalente en base 10. El número N estará representado por un vector, donde cada elemento representa un dígito de N en base b.

Ejemplos:

```
>>y= aBase10([1, 0, 1, 0, 0], 2)
y = 20

>>y= aBase10([7, 4, 3], 8)

y = 483
```

Ejercicio 5

Escriba una función recursiva que determine la cantidad de celdas de valor 1, en una matriz *M* dada de números enteros, cuadrada de dimensión 2^n x 2^n (donde n es un número natural mayor o igual que 0).

Ejercicio 6

Implementar en Octave la función recursiva *indMayorRec* la cual recibe como parámetro un vector y devuelve el índice donde se encuentra el máximo. Si se encuentra más de una vez, tomar el de menor índice.

a) Realice la función con una estrategia de recursión desde el último lugar del vector hacia el primer lugar del vector.

b) Realice la función con una estrategia de recursión desde el primer lugar del vector hacia el último lugar del vector.

Ejercicio 7

Los polinomios de Hermite se definen por las siguientes fórmulas:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2nH_{n-2}(x)$, para $n>1$

a) Escriba una función recursiva *h = hermite(n,x)* que calcule el valor del polinomio de Hermite H_n de grado n en el punto x.

b) Escriba una función iterativa *h = hermitIt(n,x)* que calcule lo mismo.

Sugerencia: utilice una estructura de iteración: **for** entre $i = 2$ e $i = n$, y mantenga en dos variables los valores de $H_{i-1}(x)$ y $H_{i-2}(x)$.

c) ¿Cuál de las dos es más eficiente y por qué? Para averiguarlo haga lo siguiente, agregue al comienzo del cuerpo de *hermite* una línea como la siguiente:

disp(['Comienzo de hermite(' num2str(n) ', x)']);

También agregue una línea similar al final del cuerpo de la misma.

¿Cuántas veces es llamada recursivamente la función *hermite*? Comparar con el número de veces que se ejecuta el ciclo en *hermitIt*.

Ejercicio 8

Suponiendo que una función *f(x)* tiene una raíz única en el intervalo [a,b], se desea implementar en Octave el *método de bisección* para calcular la raíz de *f(x)* en [a,b].

El método de bisección se basa en el Teorema de Bolzano, que demuestra que si *f(a)* y *f(b)* tienen signos distintos y *f* es una función continua entonces *f* debe tener, al menos, una raíz en el intervalo [a,b]. En cada paso, el *método de bisección* divide el intervalo en dos, usando un tercer punto *c=(a+b)/2*. En ese momento existen dos posibilidades: o bien *f(a)* y *f(c)* tienen signo distinto, o bien *f(c)* y *f(b)* tienen signo distinto. A continuación, el método selecciona el intervalo adecuado y continúa buscando la raíz, hasta que el tamaño del intervalo sea menor que cierto valor de tolerancia.

a) Escribir una función recursiva *bisec_rec* que reciba la función a evaluar, los extremos *a* y *b* y el valor de tolerancia *tol*, y que devuelva la raíz de *f* en [a,b] calculada a partir del *método de bisección*.

b) Escribir una función iterativa *bisec_iter*, análoga a la anterior, pero implementada como un algoritmo iterativo.

Ejemplo de cabezal de la función: `function root=bisec_rec(funcion,a,b,tol)`

Ejemplo de uso de la función en Octave: `root = bisec_rec(@cos, 0, 3.14, 0.0001)`, donde a = 0, b = 3.14 y tol = 0.0001

Nota: Se recomienda utilizar las funciones *feval* y *sign* en la implementación de los ejercicios.

Ejercicio 9

Escriba una función recursiva *union* donde a partir de dos vectores, u y v, que tienen sus elementos ordenados de forma ascendente y sin elementos repetidos, devuelva un vector, w, que contiene todos los elementos de u y v ordenados de forma ascendente y sin repeticiones.

Ejercicio 10

a) Considere una función **f: N → R**. Podemos representar los **n** primeros valores de dicha función mediante un vector en *Octave* $[\mathbf{f_1 f_2 \ldots f_n}]$.

Se denomina *derivada discreta de* **f** *en* **i** (se nota como $\mathbf{Df_i}$) al valor $\mathbf{f_{i+1} - f_i}$

Escriba una función recursiva *derivadaDiscRec* en *Octave* que tome como entrada un vector que contenga los **n** primeros valores de **f** y devuelva un vector que represente los **n-1** primeros valores de la *derivada discreta* de **f**.

b) Dado un vector **Df** que representa la *derivada discreta* de **f** y una constante **C**, es posible hallar la *integral discreta de* **Df** *en* **i** (se nota como $\mathbf{S_i}$) mediante la recurrencia:

$$\mathbf{S_1 = C}$$

$$\mathbf{S_{i+1} = S_i + Df_i}, \text{ para } i \geq 1$$

Observar que realizando una elección apropiada de la constante **C** (específicamente tomando $\mathbf{C=f_1}$), la *integral discreta* de todos los elementos del vector **Df** dará como resultado el vector original con los **n** primeros elementos de **f**.

Escriba una función recursiva *integralDiscRec* en *Octave* que tome como entrada un vector **Df** y una constante **C** y devuelva un vector con los valores $[\mathbf{S_1 S_2 \ldots S_n}]$.

Ejercicio 11 (opcional)

Realizar una función que calcule el determinante de una matriz cuadrada M_{nxn}. La resolución de este problema es un ejemplo que mezcla recursión e iteración.

Si $n >= 2$ entonces $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot m_{ij} \cdot \det(M_{ij})$ donde $1 \leq i \leq n$ y M_{ij} es la matriz M sin la fila *i* ni la columna *j*.

Por ejemplo para i=1:

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot m_{1j} \cdot \det(M_{1j})$$

Para n=0, det(*M*)=1 y para n=1 det (*M*) = M(1,1).

Ejercicio 12 (opcional)

Una forma de calcular aproximadamente la integral de una función consiste en dividir el intervalo de integración en pequeños intervalos, y aproximar la función linealmente en cada intervalo.

Para integrar la función f en un intervalo [a,b], utilizamos la siguiente aproximación:

$$I = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad \text{(regla del trapecio)}$$

El error cometido en esta aproximación es del orden de:

$$E = \frac{(b-a)}{3}\left(f(a)+f(b)-2f\frac{(a+b)}{2} \right)$$

Cuanto más pequeños los intervalos, mejor será la aproximación. Por lo tanto, si la aproximación es suficientemente buena (E es menor que una tolerancia *tol* determinada por el usuario), entonces nos quedamos con el valor I. De lo contrario dividimos el intervalo [a,b] en dos subintervalos [a,m] y [m,b] donde m=(a+b)/2 es el punto medio del intervalo.

Aplicamos el mismo procedimiento a cada uno de los subintervalos [a,m] y [m,b], pero exigiendo un error menor que *tol*/2 en cada uno.

De esta manera obtenemos (eventualmente luego de varias subdivisiones) dos valores *I1* e *I2* para la integral de cada subintervalo, con error menor que *tol*/2 cada uno. La integral sobre el intervalo [a,b] es entonces *I1*+*I2* con error menor que *tol*.

Nótese que el resultado de este procedimiento es subdividir en intervalos más pequeños aquellas regiones donde la función a integrar es más irregular.

a) Escribir una función recursiva **I=integro('f', a, b, tol)** que calcula la integral de la función y=f(x) en el intervalo [a,b] con un error estimado menor que **tol**, según el esquema anterior.

Sugerencia: La solución recursiva no requiere la utilización de ningún bucle **for**, solamente la utilización de un **if** y llamadas recursivas a **integro('f', a, m, tol/2)** e **integro('f', m, b, tol/2)**. Para la evaluación de la función f(x) utilice la función de Octave llamada **feval**.

b) Escribir una función iterativa **I=integrIt('f', a, b, tol)** que haga lo mismo que **integro**, pero sin utilizar recursión.

Sugerencia: En este caso es necesario utilizar al menos un bucle (**while** o **for** según corresponda) y mantener en una estructura de datos la subdivisión de intervalos. Por ejemplo, se puede mantener un vector x que inicialmente sea igual a [a,b], y vaya creciendo a medida que sea necesario subdividir intervalos. Cuando un intervalo es suficientemente pequeño se puede calcular su integral y acumular ese valor en una variable **I**. Si los intervalos se calculan de izquierda a derecha, un índice **icalc**, puede recordar hasta qué elemento de *x* se han acumulado intervalos en **I**. Cuando **icalc == length(x)** terminamos de calcular la integral.

c) Para ilustrar cómo se subdividen los intervalos, modifique la función de la parte ***(a)*** o ***(b)***, de manera que devuelva en un vector *x*, los puntos en que fue subdividido el intervalo.

Luego produzca la siguiente gráfica:

```
[I,x] = integro('log', 0.01, 1, 1e-3);
xx = 0.01:0.001:1;
plot(xx,log(xx),x,log(x),'o', x, zeros(size(x)), 'o');
```

¿Dónde ocurren los intervalos más pequeños? ¿Por qué?