Computación 1
2024

Estructuras de datos I:
Polinomios y Matrices dispersas

Estructuras de datos

Organizar los datos en la memoria para un objetivo específico:

- Representar una estructura abstracta
- Realizar operaciones con los datos
- Almacenar los datos o transmitirlos
- Accederlos de forma eficiente

Ya vimos algunos ejemplos: matrices y vectores

Veamos dos ejemplos un poco más complejos:

- Polinomios
- Matrices dispersas

Polinomios

Elementos básicos

$$f(x) = a_0 x^N + a_1 x^{N-1} + a_3 x^{N-3} + a_2 x^{N-2} + \ldots + a_{N-2} x^2 + a_{N-1} x + a_N$$

Variable: x

Coeficientes: a_i , $i = 0 .. N$

Grado: N

Polinomios

Reglas de representación en Octave

- Los coeficientes ordenados en forma decreciente por su grado
- Completitud: deben estar TODOS los coeficientes, aún si su valor = 0

(estructura *posicional*)

» a = [1 1 1] % representa: $x^2 + x + 1$

» a = [2 0 1 3] % $2x^3 + 0x^2 + x + 3$

Polinomios

Operaciones: **Suma y resta**

```
» [ 1 1 1 1 ] + [ 3 2 1 0 ]
ans =
     4     3     2     1
```

% = $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

¡Ambas representaciones deben ser de igual largo (cantidad de elementos)!

```
» [ 0 0 1 1 ] + [ 3 2 1 0 ]
ans =
     3     2     2     1
```

%(x+1)+(3x³+2x²+x)

% la resta es análoga

Polinomios

Operaciones: **Producto**

Polinomio **x** *escalar*

```
» [ 3 2 1 0 ] * 3        % (3x^3 + 2x^2 + x) 3
ans =
     9     6     3     0    % 9x^3 + 6x^2 + 3x
```

Polinomio **x** *polinomio* Ej: **(x + 1) (3x³ + 2x² + x)**

```
» [ 0 0 1 1 ] * [ 3 2 1 0 ]'
ans =
     1
```

% ¡Este resultado no es correcto!

Polinomios
Operaciones: **Producto**

```
» conv( [ 0 0 1 1 ], [ 3 2 1 0 ] )
ans =
    0     0     3     5     3     1     0
```

No es necesario que sean de igual largo:

```
» conv( [ 1 1 ], [ 3 2 1 0 ] )
ans =
     3     5     3     1     0
```

Objetivo:

$(x + 1)(3x^3 + 2x^2 + x)$

$$3x^4 + 2x^3 + x^2$$
$$3x^3 + 2x^2 + x$$

$$3x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x + 0$$

Polinomios

Operaciones: **Cociente**

```
» [c, r] = deconv( [3 5 3 1 0], [ 3 2 1 0 ] )
c =
    1    1
r =
    0    0    0    0    0

» [c, r] = deconv( [3 5 3 1 0], [ 1 1 ] )
c =
    3    2    1    0
r =
    0    0    0    0    0
```

```
% El resultado se devuelve en 2 vectores (cociente y resto)

% vectores completos

% Si se recibe el resultado en un vector sólo obtenemos el cociente
```

Polinomios
Operaciones: **Raíces**

Octave provee una función que halla las raíces de polinomios con una precisión determinada; puede no ser la que le sirve al usuario.

Éste deberá verificar si precisión y tiempo de cálculo se adecúan a su problema

(en Métodos Numéricos se verán algunas alternativas)

```
» roots( [ 4 2 1 ] )
ans =
   -0.2500 + 0.4330i
   -0.2500 - 0.4330i

» roots( [ 8 4 2 1 ] )
ans =
   -0.5000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.5000i
    0.0000 - 0.5000i
```

Polinomios

Operaciones: poly() **Construir un polinomio**

La función inversa a hallar las raíces es construir un polinomio que tenga raíces dadas:

```
» r1 = roots( [ 4 2 1 ] )
r1 =
  -0.2500 + 0.4330i
  -0.2500 - 0.4330i

» poly( r1 )
ans =
  1.0000 0.5000 0.2500
```

```
» roots( [ 1 0.5 0.25 ] )
ans =
  -0.2500 + 0.4330i
  -0.2500 - 0.4330i
```

Polinomios

Operaciones: polyval() **Evaluar un polinomio**

Argumentos: polinomio y un escalar

```
» polyval( [ 4 2 1 ],2 )
ans =
    21
```

Argumentos: polinomio y una matriz

```
» polyvalm([3,2,1],[1,0;0,1])
ans =
      6     0
      0     6
```

Polinomios

```
Operaciones: polyder() Deriva un polinomio
» polyder( [ 4 2 1 ])
ans =
     8     2
Operaciones: polyint()Integra un polinomio
» polyint([4,2])
ans =
      2     2     0
```

Polinomios

Ejercicio: Evaluar un polinomio (polyval)

Ej: $p(x)=x^4+3x^2+x+1$

P=[1,0,3,1,1]

polyval(P,2):

$1+2(1+2(3+2(0+2(1))))=1+2*1+2^2*3+2^3*0+2^4*1$

Polinomios

Ejercicio: Evaluar un polinomio (polyval)

```
function f = polyval(p,x)
  lp=length(p);
  f=0;
  for i=1:lp
    f=x*f+p(i);
  end
  %for i=1:lp
  %  f=f+x^(lp-i)*p(i);
  %end
```

```
function f = polyval(p,x)
  lp=length(p);
  if lp==0
    f=0;
  else
    f=p(lp)+
    x*polyval(p(1:lp-1),x);
  end
```

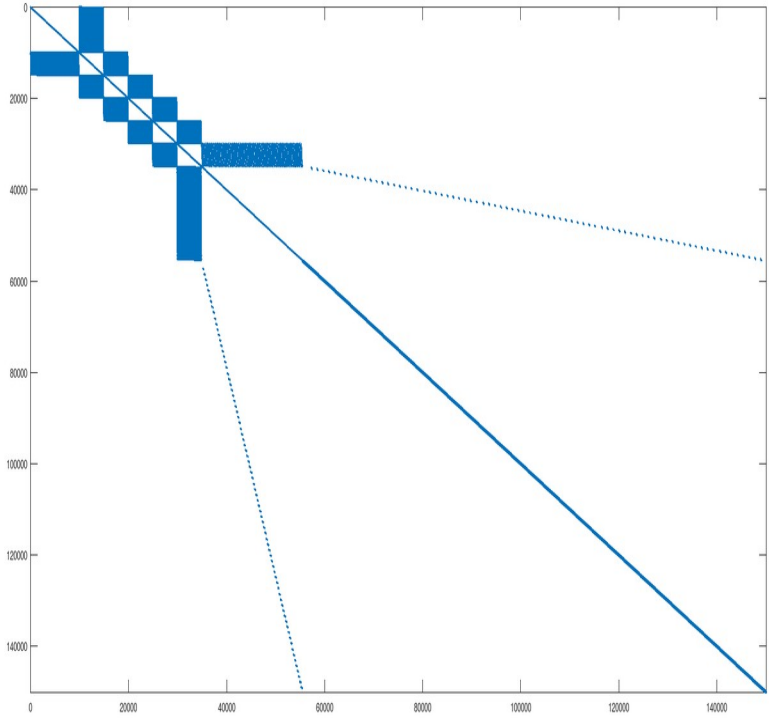
Polinomios
Operaciones: **Resumen**

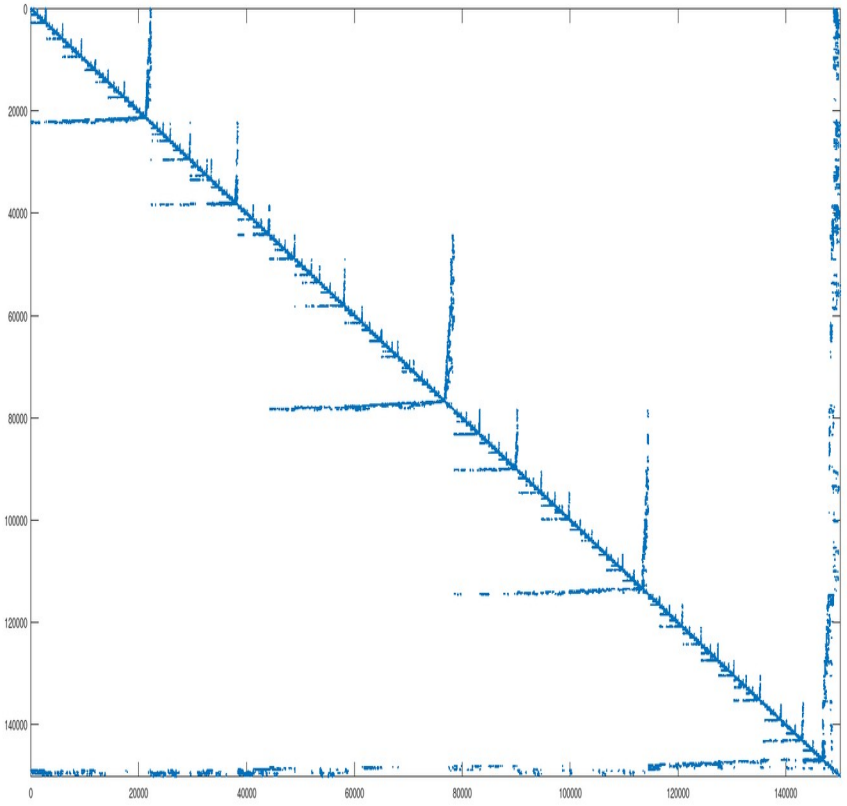
- Se representan usando vectores
- En algunos casos las operaciones de vectores resuelven correctamente las operaciones con polinomios
  - Suma (y resta)
  - Producto de un polinomio por un escalar

Polinomios
Operaciones: **Resumen**

- En otros casos hay funciones específicas:
  - Producto (y cociente) entre polinomios
  - Raíces (construcción de polinomio)
  - Evaluar polinomios
  - Derivar
  - Integrar

Matrices dispersas





Matrices dispersas

- Situación:
  - Matrices muy grandes
  - Previsible “gran porcentaje” de valores = 0

Se busca una forma de representar esas matrices que “cueste” menos memoria y permita acelerar los cálculos.

Las matrices son *naturalmente* muy eficientes en el uso de memoria -para almacenar datos- y de procesador -para accederlos-.

Matrices dispersas

Representación en memoria de una matriz convencional

La memoria es una secuencia de bits organizada en bloques de a 8

Si tenemos matriz(m, *n*) de reales de 4 Bytes

Si se almacena por filas la posición en bits de la celda (*i, j*) en la memoria es:

inicio_matriz + **(((i – 1) * n) + (j - 1)) * (4 * 8)**

Matrices dispersas

Representación en memoria de una matriz convencional

El caso inverso es igual de sencillo:

Dado un entero que representa una posición dentro de una secuencia de bytes determinar fila y columna (con sintaxis Octave):

Fila i = floor(posición_de_celda-1 / n) + 1

Columna j = mod(posición_de_celda-1, n)+1

Matrices dispersas

Conclusiones sobre el uso de matrices convencionales

- Son pocos cálculos
- Esos cálculos son “elementales”: **+**, **-**, ***** y **/**
- Son cálculos con enteros
  - parte entera y módulo se pueden hacer con aritmética de punto fijo
- Si la matriz (tensor) es n-dimensional (n > 2) se agrega complejidad pero se mantienen estas características generales

Matrices dispersas

Definición de MATRIZ DISPERSA

Es aquella que está compuesta por muchos elementos de valor = 0 de tal forma que los que son distintos de 0 se encuentran muy dispersos en la matriz y sin relación entre sí.

El qué tan dispersos están depende de las circunstancias. En nuestro caso nos preocupa el uso de memoria.

Eventualmente se podría definir como dispersa con respecto a otro valor distinto de 0.

Matrices dispersas

Forma de representación

- Debemos tratar de preservar los principios de economía:
  - Mínimo consumo de memoria
  - Mínimo uso de procesador
  - “tiempo” para acceder a los datos (los usos de esos datos de por sí pueden requerir su cuota de procesador)
  - “tiempo” de cálculos
  - Localidad de datos

Matrices dispersas

Forma de representación

- Formato simple o elemental
  - 3 vectores
    - Vector_f (fila), enteros
    - Vector_c (columna), enteros
    - Vector_d (dato), pto flotante

Matrices dispersas

Forma de representación

Ventajas: (formato elemental)

- Seguimos usando vectores (matrices unidimensionales) que tienen las características descritas y deseadas
- Funcionamiento sencillo, por ejemplo:

para mat(3, 1) = 100

- `vector_f( n ) = 3`
- `vector_c( n ) = 1`
- `vector_d( n ) = 100`

¿quién es n?

n = ordinal del elemento entre los distintos de 0

Matrices dispersas

Una forma de representación: costos

Si quisiéramos representar una matriz que contiene enteros de 4 bytes:

- En una matriz ***completa***: (m x n) * 4
- En la matiz ***dispersa*** máx.: (nz * 4) * 3

Empezamos a “economizar” cuando la cantidad de elementos distintos de 0 es < 1/3 del total

Esto cambia según el tamaño de los elementos a guardar y el de los usados para los vectores fila y columna

Matrices dispersas

Una forma de representación: costos

Si quisiéramos representar una matriz que contiene reales de 4 bytes y utilizamos enteros de 2 bytes para los índices de filas y columnas:

- En una matriz ***completa***: (m x n) * 4
- En la matiz ***dispersa*** máx.: (nz * 4) + 2 * nz * 2

Empezamos a “economizar” cuando la cantidad de elementos distintos de 0 es < 1/2 del total

Matrices dispersas

forma de representación

- Formato CSR- (Compressed Storage Row) o CRS
  - Vector_f (índice de cada nueva fila)
  - Vector_c (columna)
  - Vector_d (dato)

Matrices dispersas

forma de representación

- Formato CRS

  - Un vector de punto flotante de tamaño *k* en el que se almacenan los valores de los coeficientes.
  - Otro vector de tamaño *k* en el que se almacenan los números de columna de los elementos distintos de cero.
  - Un vector de tamaño *n+1* siendo *n* la cantidad de filas de la matriz, en el cual se almacena la posición de la primera ocurrencia de cada fila

Matrices dispersas

forma de representación

- Formato CRS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 10 & 12 & 15 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 2 & 4 & 2 & 3 & 4 & 1 & 4 & 2 & 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrices dispersas

forma de representación

- Formato CCS (Compressed Column Storage)
  - Igual al CRS pero almacena por columna

- Muchos otros formatos...
  - DIA (Diagonal Storage Format)
  - Ellpack-itpack
  - BCSR
  - Estrategias dinámicas

Matrices Dispersas

Solución de Octave: generación de matriz dispersa

Si tenemos una matriz *a* en *forma completa*

s = sparse(a)

Octave se encarga de dimensionar las estructuras auxiliares

Matrices Dispersas

Solución de Octave: generación de matriz dispersa

Si la matriz ya está en forma dispersa elemental:

- **s = sparse(f, c, d, m, n, nzmax)**
- f, c y d son los vectores que representan filas, columnas y datos respectivamente
- m y n indican cantidad de filas y columnas que tendrá -si no se especifican se tomará m = max(f) y n = max(c) -
- nzmax no se usa pero está por compatibilidad con MATLAB (es el espacio pre-reservado para no-ceros de la matriz)

Matrices Dispersas

Convertir de dispersa a completa

- ¿cómo saber si una matriz es dispersa?:

issparse(mat)

➔ devuelve TRUE o FALSE (1 o 0)

- Convertir de dispersa a completa:

a = full(s)

Matrices Dispersas

Solución de Octave: operaciones

- Todas las operaciones se hacen con matrices dispersas de igual modo que con las “completas”.

Se debe tener en cuenta lo siguiente:

- A_disp oper B_disp ➔ R_disp
- A_comp oper B_comp ➔ R_comp
- A_disp oper B_comp ➔ R_comp (excepto que de antemano se sepa que será dispersa)

Matrices Dispersas

Funciones

- speye - Matriz identidad dispersa.
- find - Devuelve los indices de los coeficientes distintos de cero.
- nnz - Numero de elementos no cero de la matriz.
- nonzeros - Elementos no cero de la matriz.

- spy - Visualiza el patrón de la matriz.

Matrices Dispersas
Funciones

- Algebra lineal:
  - eigs - Algunos valores propios.
  - svds - Algunos valores singulares.
  - ilu - Factorización LU incompleta.
  - ichol - Factorización de Cholesky incompleta.
  - normest - Norma 2 estimada.
  - pcg - Gradiente conjugado precondicionado.
  - etree - Árbol de eliminación (treeplot).

Matrices Dispersas

Ejercicio

Obtener la transpuesta de una matriz dispersa en formato elemental...

Matrices Dispersas

Ejercicio

```
function [c,f,v] = transp(f,c,v)
```

Matrices Dispersas

Ejercicio

Escribir una función recursiva que reciba una matriz dispersa en formato elemental y un número x, y devuelva la matriz eliminando todas las entradas iguales a x.

Matrices Dispersas

Ejercicio

```
function [fs, cs, vs] = sacarx( fe, ce, ve, x )
       l = length(fe);
       if(l ==0)
           fs = [];
           cs = [];
           vs = [];
       else
           [fs,cs,vs] = sacarx( fe(2:l) , ce(2:l), ve(2:l), x )
           if ( ve(1) ~= x )
                fs = [fe(1), fs];
                cs = [ce(1), cs];
                vs = [ve(1), vs];
           end
       end
```