Práctico 9

1. Hallar la solución de la ecuación de ondas,

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty)$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} u(x,0) = x(L-x) & x \in [0,L] \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0,\infty) \end{cases}$$

utilizando el método de separación de variables.

2. *a)* Un caso particular de soluciones de la ecuación del calor son las que corresponden a situaciones en las que el perfil de temperaturas no se modifica con el tiempo (lo que equivale a decir que $u(x,t)$ no depende de t, y por lo tanto $u_t = 0$). A esa soluciones las llamaremos *soluciones estacionarias* del problema.
   Hallar la solución estacionaria a la ecuación de calor, $u_e(x)$, para el problema con datos de contorno

$$u(0,t) = A, \qquad u(L,t) = B$$

   b) Hallar la solución, $u(x,t)$, de la ecuación del calor en $(0,1) \times (0,\infty)$ con condiciones de borde

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 1$$

   y dato inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

   Sugerencia: utilizar el principio de superposición de soluciones.

   c) Hallar una estimación de $|u(x,t) - u_e(x)|$ y probar que la solución hallada en la parte anterior tiende a la solución estacionaria cuando t tiende a infinito.

3. ***Parcial 2008*** - Sea la ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & (t,x) \in (0,+\infty) \times (0,\pi) \\ u(t,0) = 0 \text{ y } u_x(t,\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = x(2\pi - x) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

   a) Si $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$ es solución del problema entonces

$$u_k(x,t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

b) Demostrar que la solución anterior es efectiva.

4. Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = x \operatorname{sen} t, \quad (x,t) \in D = (0,\pi) \times \mathbb{R}.$$

a) Hallar una solución particular $u_0(x,t)$ de la forma $f(x)\operatorname{sen} t + g(x)$ tal que las funciones f y g satisfacen $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = -1$ y $g'(0) = -1$.

b) Hallar la función u que sea solución de la ecuación en D y satisfaga las condiciones

$$u(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^4}, \ x \in [0,\pi]$$

$$u_t(x,0) = -x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \ x \in [0,\pi]$$

$$u(0,t) = 0, \ t \in \mathbb{R}$$

$$u(\pi,t) = -\pi \sin t - \pi, \ t \in \mathbb{R}.$$

5. Se considera la ecuación:

$$(*) \begin{cases} u_t = u_{xx} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty), \\ u_x(0,t) = 0 \text{ y } u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{para todo } t > 0, \\ u(x,0) = x \quad \text{para todo } x \in [0,\pi], \\ u \text{ de clase } C^2 \text{ en } (0,\pi) \times (0,+\infty) \text{ y continua en } [0,\pi] \times (0,+\infty). \end{cases}$$

a) Buscando soluciones de la forma $X(x)T(t)$ hallar una solución de $(*)$ de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Nota: observar que si $u_n(x,t) = X(x)T(t)$, la condición $u_x(0,t) = 0$ implica $X^{'}(0) = 0$ y $u_x(\pi,t) = 0$ implica $X^{'}(\pi) = 0$.

b) Probar que

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} \quad \text{para todo } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty).$$

6. Consideremos dos sucesiones de números reales α_k y β_k, $k = 1, 2, \ldots$ tales que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k| + |\beta_k| < \infty.$$

a) Mostrar que la serie

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función g, continua y periódica con período $2L$.

b) Supongamos que los coeficientes α_k y β_k satisfacen la condición más fuerte

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^l|\alpha_k| + k^l|\beta_k| < \infty,$$

donde $l \geq 1$ es un número natural. Mostrar que el límite g de la serie de la primera parte es una función de clase C^l en $\mathbb{R}$.

7. Utilizar el método de las series de Fourier para resolver la ecuación

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$$

con las condiciones de borde:

a) $u(0,y) = u(\pi,y) = \sin y$, $u(x,\pi) = u(x,0) = 0$,

b) $u(0,y) = u(\pi,y) = 0$, $u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi)$,

c) $u(0,y) = u(\pi,y) = \sin y$, $u(x,\pi) = u(x,0) = x(x-\pi)$.

8. En este ejercicio consideramos el problema de la cuerda vibrante de longitud 1 con sus extremos fijos cuyas vibraciones están amortiguadas. Sea $\Omega = (0,1) \times (0,+\infty)$. La descripción de este problema conduce a buscar una función $u = u(x,t)$ definida sobre el conjunto $\bar{\Omega}$ que satisfaga

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - u_t(x,t), & (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1] \\ u_t(x,0) = v_0(x), & x \in [0,1] \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,+\infty), \end{cases}$$

donde u_0 y v_0 son dos funciones prefijadas que contienen la información sobre el estado de la cuerda en el instante inicial, y que satisfacen

$$u_0(0) = u_0(1) = v_0(0) = v_0(1) = 0.$$

El término $-u_t$ en el miembro de la derecha de la ecuación es el responsable del amortiguamiento.

a) Buscar una solución de la ecuación usando el método de las series de Fourier. Calcular la solución formalmente.

b) Buscar hipótesis sobre los datos u_0 y v_0 que permitan asegurar que la solución hallada es efectivamente una solución del problema.

9. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones ($f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) tal que

$$f_n''(x) = f_{n+2}(x)(n+2)(n+1) - f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{con } f_0(x) = e^x \text{ y } f_1(x) = 0$$

a) Probar que $f_{2n+1}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y que $f_{2n}(x) = 2^n e^x/(2n)!$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Se considera la ecuación

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + u(x,t) \text{ con } -L < x < L \text{ y } 0 < t < 1$$

1) Buscar soluciones de la forma
$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) t^n,$$
dando una expresión explícita para $f_n(x)$.

2) Probar que la función $u(x,t)$ hallada en 1) es efectivamente solución.