# Práctico 7

1. Determinar cuáles de las siguientes sucesiones convergen puntualmente y uniformemente. Estudiar la continuidad de la función límite en cada caso.

   a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{n}$ con $x \in \mathbb{R}$.

   b) $g_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.

   c) $h_n(x) = \dfrac{x}{nx+1}$ con $x \in (0,1)$.

   d) $i_n(x) = \dfrac{x}{(x+1)^n}$ con $x \in [1,2]$.

2. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones, discutiendo según los posibles dominios de definición.

   a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n+x^2}$.

   b) $f_n(x) = e^{-n^2x^2}$.

   c) $f_n(x) = n^\alpha(1-x)x^n$ (discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}$).

   d) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ $n \in \mathbb{N}$).

   e) $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ |x| \geq \frac{1}{n} \\ 1-nx & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1+nx & \text{si } \ -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \end{cases}$

3. (***Parcial de 2003***).

   a) Demostrar que la sucesión de funciones
   $$f_n : [0,1) \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n$$
   no converge uniformemente, pero si puntualmente.

   b) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(1) = 0$. Demostrar que la sucesión
   $$h_n : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad h_n(x) = g(x).x^n$$
   es uniformemente convergente.

4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿Es uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

5. Consideremos la sucesión de funciones en $\mathbb{R}$
   $$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$$

   a) Calcular el límite puntual de las sucesiones $f_n$ y $f_n'$, a los que llamamos $f$ y $g$ respectivamente.

   b) Probar que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

   c) Estudiar en qué conjuntos $X \subset \mathbb{R}$ se tiene $f_n \rightrightarrows f$, y en qué conjuntos se tiene $f_n' \rightrightarrows g$.

6. Sea $\mathcal{C}^1([a.b],\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones reales definidas en $[a,b]$ de clase $C^1$ con la norma
   $$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$
   Mostrar que $\lim f_n = f$ en $\mathcal{C}^1([a.b],\mathbb{R})$ significa que $f_n$ y $f_n'$ convergen uniformemente a $f$ y $f'$ respectivamente.

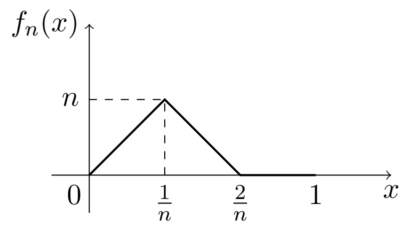
7. Sea la sucesión $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1 + n 2^n x^2}$ para $x \in [0, 1]$.

   a) Determinar el límite puntual.

   b) Comparar $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$.

   c) Calcular el supremo de $f_n(x)$ para $x \in [0, 1]$.

8. Sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida como en la figura:




   a) Demostrar que $f_n \to 0$ (puntualmente).

   b) Probar que $\lim \displaystyle\int_0^1 f_n \neq \int_0^1 \lim f_n$.

   c) Concluir que $f_n \not\rightrightarrows 0$.

9. Sea $f(x) = 1/(1 + x^2)$ y $f_n(x) = f(x/n)/n$. Mostrar que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $g$ y que sin embargo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx \not\to \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

10. a) Probar que si $f_n : X \to \mathbb{R}$ son continuas $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ en $X$ y $x_n \to x_0$ entonces $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

    b) ¿Es cierto a) si $f_n \to f$ puntualmente?

11. a) Demuestre que $f_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\text{sen}(ix)}{i^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

    b) Si llamamos $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$, demostrar que $f$ es continua y que además se cumple:

$$\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

12. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las series de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ cuando:

    a) $a_n(x) = \dfrac{\text{sen}(nx)}{n^2}$

    b) $a_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$

    c) $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$

    d) $a_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1!}$

13. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función tal que $\sup\{|f(x)| : x \in X\} < 1$. Mostrar que $\sum [f(x)]^n$ converge uniformemente y calcular su suma.

14. Estudiar la convergencia puntual y uniforme (calculando la suma cuando corresponda) para las series de funciones $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ para:

    *a*) $a_n(x) = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$

    *b*) $a_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$

    *c*) $a_n(x) = xe^{-nx}$