Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 3
Procesos estocásticos
Proceso de Weiner, Ergodicidad.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1

Sea W_t un proceso de Wiener, utilizar que $R_W(t_1, t_2) = \sigma^2 \min(t_1, t_2)$ y mostrar que tiene incrementos no correlacionados, i.e.

$$\mathrm{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] = 0$$

si $[t_1, t_2)$ y $[t_3, t_4)$ son disjuntos.

★ Ejercicio 2

El proceso de Wiener W_t se puede obtener como límite de un proceso random walk continuo,

$$W_t = \lim_{\Delta_t \to 0} W_\Delta = \lim_{\Delta_t \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \Delta_w u(t - n\Delta_t)$$

con $\Delta_w = \sigma \Delta_t^{\frac{1}{2}}$ y Z_n un proceso Bernoulli de parámetro $p = 1/2$. Investigar las consecuencias sobre la autocorrelacion del proceso de Wiener si se considera $\Delta_w = \sigma \Delta_t^x$ con $x < 1/2$ o $x > 1/2$.

✦ Ejercicio 3 (11.25)

Sea X_t ruido blanco gaussiano de media nula y autocorrelaciòn $\sigma^2 \delta(\tau)$, y W_t su integral:

$$W_t = \int_0^t X_t dt$$

Mostrar que W_t tiene igual autocorrelaciòn que el proceso de Wiener y por tanto es un modelo vàlido para la integral del ruido blanco gaussiano.

✦ Ejercicio 4 (10.67)

Sea Y_t un proceso WSS. En cada uno de los siguientes casos, determinar si $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_t dt \to \mathrm{E}[Y_t]$ (convergencia en media cuadrática).

(a) $C_Y(\tau) = e^{-|\tau|}$

(b) $C_Y(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$

✹ Ejercicio 5

Sea x_n una realización de un proceso estocástico ergódico definido por el conjunto de variables aleatorias $\{X_n\}$, con $-\infty < n < \infty$. Sea $p_X(x)$ a la densidad de probabilidad para todas las variables aleatorias X_n.

(a) Considerar $< u(a - x_n) >$, el promedio temporal de la función $u(a - x_n)$ en que $u(.)$ es el escalón en el dominio de los reales y a es una constqante real. Expresar en palabras el significado de este promedio temporal.

(b) Considerar el promedio probabilístico de la función $u(a - X_n)$. ¿Qué es $\mathrm{E}[u(a - X_n)]$ en términos de $p_X(x)$?

(c) ¿Es el resultado de la parte (b) consistente con la interpretación de la parte (a)? Es decir, ¿es razonable que se cumpla la siguiente igualdad?:

$$\mathrm{E}[u(a - X_n)] = < u(a - x_n) >$$

Solución

Ejercicio 1

Sean $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] &= \mathrm{E}[W_{t_2}W_{t_4}] - \mathrm{E}[W_{t_2}W_{t_3}] - \mathrm{E}[W_{t_1}W_{t_4}] + \mathrm{E}[W_{t_1}W_{t_3}] \\ &= \sigma^2(t_2 - t_2 - t_1 + t_1) = 0 \end{aligned}$$

y los incrementos son no correlacionados.

Ejercicio 2

La autocorrelación R_W se obtiene como límite de la autocorrelación R_{W_Δ}

$$R_W(t_1, t_2) = \lim_{\Delta_t \to 0} R_{W_\Delta}(t_1, t_2) = \lim_{\Delta_t \to 0} (\Delta_w)^2 \min(n_1, n_2)$$

con $n1 = [t_1]/\Delta_t$, $n2 = [t_2]/\Delta_t$. Sustituyendo $\Delta_w = \sigma \Delta_t^x$ tenemos

$$R_W(t_1, t_2) = \lim_{\Delta_t \to 0} (\sigma \Delta_t)^{2x} \min(n_1, n_2) = \lim_{\Delta_t \to 0} \sigma^2 \Delta_t^{2x-1} \min(\Delta_t n_1, \Delta_t n_2)$$

y tomando el límite tenemos

$$R_W(t_1, t_2) = \lim_{\Delta_t \to 0} \sigma^2 \Delta_t^{2x-1} \min([t_1], [t_2]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2 \\ \sigma^2 \min(t_1, t_2) & \text{si } x = 1/2 \\ \infty & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Por lo que $x = 1/2$ es el único valor que da como resultado el proceso de Wiener.

Ejercicio 3

Si $0 \leq s < t < \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[W_t W_s] &= \mathrm{E}\left[\int_0^t X_\tau d\tau \int_0^s X_\theta d\theta\right] \\ &= \int_0^s \left(\int_0^t \mathrm{E}[X_\tau X_\theta] d\tau\right) d\theta = \int_0^s \left(\int_0^t R_X(\theta, \tau) d\tau\right) d\theta \\ &= \sigma^2 \int_0^s \left(\int_0^t \delta(\tau - \theta) d\tau\right) d\theta = \sigma^2 \int_0^s d\theta \\ &= \sigma^2 s \end{aligned}$$

En forma análoga, si $0 \leq t < s < \infty$ entonces $\mathrm{E}[W_t W_s] = \sigma^2 t$. Por lo que

$$\mathrm{E}[W_t W_s] = \sigma^2 \min(s, t)$$

Ejercicio 4

(a) Si aplicamos la transformada de Fourier a $C_Y(\tau)$ tenemos

$$\mathcal{F}\{C_Y(\tau)\} = \mathcal{F}\{e^{-|\tau|}\} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}$$

la cual es contunua en $f=0$ por lo que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_t dt \xrightarrow[T\to\infty]{m.c.} \mathrm{E}[Y_t]$$

(b) En forma análoga

$$\mathcal{F}\{C_Y(\tau)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}\right\} = \Pi(-1/2,1/2)(f)$$

la cual es contunua en $f=0$ por lo que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} Y_t dt \xrightarrow[T\to\infty]{m.c.} \mathrm{E}[Y_t]$$

Ejercicio 5

(a)

$$< u(a-x_n) > \; = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{n=-k}^{k} \mathbb{1}_{\{x_n \le a\}}}{2k+1}$$

Este promedio temporal se puede interpretar como la propoción de tiempo que la secuencia toma un valor menor a a.

(b)

$$\mathrm{E}\left[u(a-X_n)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)u(a-x)dx = \int_{-\infty}^{a} p_X(x)dx = P(X_n \le a)$$

(c) Sabemos que el proceso es ergódico, por lo tanto $E\big[u(a-X_n)\big] =< u(a-x_n) >$. Por otro lado es intuitivamente razonable que la proporción de veces en que $x_n \le a$ sea parecido a la probabilidad de que esto ocurra, $P(x_n \le a)$. Es más, una forma de estimar la probabilidad de un evento es repetir el experimento y dividir la cantidad de resultados favorables entre la cantidad total. Esto es muy parecido a la igualdad que estamos analizando.