Enunciado del Teorema de Picard

En esta seccón vamos a enunciar el teorema más importante del curso, el Teorema de Picard. No daremos la demostración pero si probaremos varias resultados que son de mucha importancia y que se deducen con relativa facilidad de su enunciado.

Vamos a definir los conceptos básicos que nos ayudaran a entender el enunciado.

Decimos que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **Lipschitziana** respecto a la variable espacial si existe $k > 0$ constante tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \ \|x - y\|, \ \forall \ (t,x),(t,y) \in \Omega$$

Diremos que una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz según la variable espacial si para cada $(t_0, x_0) \in \Omega$ existe una constate $k > 0$ y un entorno $U \subset \Omega$ alrededor de (t_0, x_0) tal que:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k \ \|x - y\|, \ \forall \ (t,x),(t,y) \in U.$$

Observación:

- Cuando hablamos de la norma en este caso nos referimos a la norma en $\mathbb{R}^n$.
- Que una función sea de Lipschitz según la variable espacial implica que la función es continua y acotada según la variable espacial, pero no según el tiempo. La función no tiene porque ser continua ni acotada.

Propiedad 1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en Ω. Entonces f es localmente Lipschitziana según la variable espacial.*

La demostración sale bastante directo del teorema del valor medio. Por lo tanto:
TODA FUNCIÓN DE CLASE C^1 VERIFICA LA HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE PICARD.

Se recuerda que:

Si bien seguramente ya saben distinguir cuando un conjunto es abierto o no, puede ser que estén olvidados de la definición formal. Por esta razón la repasaremos.

$$A \text{ es un conjunto abierto} \Leftrightarrow \forall \ a \in A, \exists \ \delta > 0 / \ B_{a,\delta} \subset A.$$

En palabras, dado cualquier elemento del conjunto, se puede definir un entorno alrededor del mismo tal que el entorno también este incluido en el conjunto.

Repetidas veces nos definirnos un entorno alrededor de un elemento del conjunto Ω a lo largo del capítulo y podremos hacerlo sin problemas porque estaremos trabajando con Ω abierto.

Ahora si, estamos preparados para demostrar el teorema de Picard.

Teorema 0.1. ***Teorema de Picard.***

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz según la variable espacial, continua y $(t_0, x_0) \in \Omega$. Entonces:

1. *Existe $\alpha > 0$ donde la ecuación diferencial*
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$
tiene una única solución definida en el intervalo $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$.
2. *Para el α hallado en el item anterior, existe $r > 0$ tal que si $||(t_1, x_1) - (t_0, x_0)|| < r$, $(t_1, x_1) \in \Omega$, se cumple que la ecuación diferencial*
$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$
tiene una única solución definida en el intervalo $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$.

El item 1 de este teorema nos dice que, bajo las hipótesis de Picard, la ecuación diferencial tiene solución única local. El item 2 nos dice que el tamaño del intervalo donde está definida localmente la solución no cambia si movemos poco la condición inicial.

Continuaremos con un ejemplo.

***Ejemplo* 0.1.**

Consideremos la ecuación diferencial

$$(*) \quad \dot{x} = \sqrt{|x|} = f(t,x).$$

Lo primero que podemos deducir de las soluciones es que hay una solución estacionaria $x(t) = 0$ y que las soluciones tendrán que ser no decrecientes ya que $\dot{x}$ es siempre mayor o igual a cero. Veamos que podemos decir de la unicidad de las soluciones. Dado que la derivada de la raíz tiende a infinito en cero, tenemos que:

$$\frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x-y\|} = \frac{\|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\|}{\|x-y\|}$$

tenderá a infinito para x tendiendo a cero y tomando $y = 0$. De manera que f no cumple la condición de Lipschitz en $x = 0$.

Definimos la función x_1 tal que

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

Vamos a probar que x_1 es solución de $(*)$. Si $t \leq 0$, se cunple que $x_1(t) \equiv 0$, lo que es claro que es solución. Si $t \geq 0$, $x_1(t) = \frac{t^2}{4}$. Luego $\dot{x}_1 = \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}}$. Lo que muestra que es solución.
Por lo tanto, x_1 y $x(t) \equiv 0$ son soluciones de $(*)$. Este ejemplo muestra que si f no cumple la condición de Lipschitz, entonces no tiene porque existir solución única.

Ejercicio.

Sea la ecuación

$$x'(t) = \begin{cases} \frac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si} \quad (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

1. Probar que $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4 + c^4}$ es solución para todo $c \in \mathbb{R}$ con la condición $x(0) = 0$.
2. ¿Qué hipótesis del Teorema de Picard no se cumplen?.

0.1. Consecuencias del teorema de Picard

0.1.1. Soluciones maximales

Lo que continuaremos estudiando en esta sección, es donde están definidas las soluciones. Picard nos asegura la existencia en un entorno de t_0 pero veremos que tanto podemos extender estas soluciones y si estas extensiones, bajo algunas hipótesis, son únicas.

Es bastante intuitivo que quiere decir extender una función (y ya se ha utilizado ese término en el último ejemplo), pero por las dudas lo definiremos formalmente. Denotaremos (I, φ) a la solución de una ecuación diferencial con condiciones iniciales definida en el intervalo I. Se dice que (I, φ) es una extensión de otra solución (J, ψ) si $J \subset I$ y $\varphi|_J = \psi$, donde la notación $\varphi|_J$ indica la función φ evaluada en los puntos de J. Otra forma de escribir eso último es que $\varphi(t) = \psi(t)$ para todo $t \in J$.

Definiremos el **intervalo maximal** de una solución como el intervalo más grande donde la solución esta definida. La solución asociada a este intervalo se le llama **solución maximal**. Más formalmente, decimos que (I, φ) es la solución maximal cuando ella misma es su única extensión, en ese caso I es el intervalo maximal. De aquí en más denotaremos $I(t_0, x_0)$ al intervalo maximal de la solución con condición inicial (t_0, x_0).

En el ejemplo anterior vimos que podíamos extender las soluciones hasta estar definidas en todo $\mathbb{R}$, sin embargo la extensión no era única. El problema surge justamente en $x = 0$ donde no se cumplen las hipótesis de Picard, pero parece lógico que si la función no pasa por ningún punto donde no se cumplan las condiciones de Picard la extensión sea única.

En primer lugar, demostraremos que dadas dos soluciones a la misma ecuación diferencial en las hipótesis de Picard con condiciones iniciales (I_1, φ_1) y (I_2, φ_2) coinciden en la intersección de sus dominios. Que sean dos soluciones al mismo problema con condiciones iniciales implica que $t_0 \in I_1$, $t_0 \in I_2$ y ademas $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.

Recordamos que un conjunto abierto es conexo si no lo podemos escribir como la unión de dos abiertos disjuntos. Por ejemplo los reales son un conjunto conexo, también lo son el conjunto $(1, 2)$ o $(3, +\infty)$. Un conjunto no conexo es el $(0, 3) \cup (7, 8)$.

Lema 0.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ en las hipótesis de Picard. Sean (I_1, φ_1) y (I_2, φ_2) soluciones a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial (t_0, x_0). Entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$.*

Demostración:

Sea $J = I_1 \cap I_2$. Es claro que J es conexo (la intersección de I_1 e I_2 es un intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma (a, b)) y abierto (por ser intersección de abiertos). Podemos escribir a J como la unión de:

$$A = \{t \in J / \ \varphi_1(t) = \varphi_2(t)\}$$

$$B = \{t \in J / \ \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\}$$

se ve claramente que $J = A \cup B$ y que $A \cap B = \emptyset$. Podemos deducir que B es abierto por la continuidad de las soluciones (si $\varphi_1(t_1) \neq \varphi_2(t_1)$ existe un entorno de t_1 donde las funciones siguen siendo distintas). Por otro lado, si $t_2 \in A$ implica que $\varphi_1(t_2) = \varphi_2(t_2) = x_2$. Por Picard, existe una única solución con condición inicial (t_2, x_2) definida en $(t_2 - \alpha, t_2 + \alpha)$, por lo tanto $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ para todo $t \in (t_2 - \alpha, t_2 + \alpha)$. En consecuencia, $(t_2 - \alpha, t_2 + \alpha) \subset A$ por lo que A también es abierto (por definición de abierto).

Dado que J es conexo, no se puede escribir como la unión de dos abiertos disjuntos, por lo que uno de los conjuntos tendrá que ser vacío. Sabemos que $t_0 \in A$, de modo que $B = \emptyset$. Dejando demostrado el lema. $\square$

Ahora si, vayamos a las soluciones maximales.

Teorema 0.3. *Existencia de solución maximal.*

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua. Entonces para cualquier condición inicial $(t_0, x_0) \in \Omega$ el problema

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución maximal.

Demostración:

Definamos el conjunto $\mathcal{S}$ como la familia de soluciones a $(*)$ definidas en distintos intervalos que contienen a t_0:

$$\mathcal{S} = \{\varphi_\lambda : I_\lambda \to \mathbb{R}^n / \varphi_\lambda \text{ es solución a } (*)\}.$$

Por Picard sabemos que este conjunto no es vacío. Ahora definamos el intervalo I como:

$$I = \bigcup_\lambda I_\lambda$$

Por como definimos I, se cumple que:

$$t \in I \Rightarrow \exists \ \lambda_0 / \ t \in I_{\lambda_0}.$$

Por esta razón definimos la función $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ como:

$$\varphi(t) = \varphi_{\lambda_0}(t)$$

En caso de existir más de un λ_0 no hay problema, ya que por el lema anterior todas las funciones que estén definidas en ese t valen lo mismo.

Si esta función φ es solución a la ecuación diferencial, lo cual es bastante obvio, vemos que la misma es la solución maximal, ya que ninguna otra solución puede ser una extensión de φ (todos los I_λ están incluidos en I). Veamos si verifica $(*)$. Por un lado:

$$\varphi(t_0) = \varphi_{\lambda_0}(t_0) = x_0.$$

Por otro lado $\varphi|_{I_{\lambda_1}} = \varphi_{\lambda_1}$. Entonces

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_{\lambda_1} = f(t, \varphi_{\lambda_1}) = f(t, \varphi(t))$$

por lo que φ verifica la ecuación diferencial, dejando demostrado el teorema. □

Nuevamente, el ejemplo visto anteriormente de $\dot{x} = \sqrt{x}$ no contradice este último teorema. Este teorema vale donde valga Picard, mientras que las soluciones definidas en el ejemplo no permanecen en el conjunto donde vale Picard.

Algo que parece tener bastante sentido, es que dada una ecuación diferencial en las hipótesis de Picard, si consideramos dos condiciones iniciales lo suficientemente cerca las soluciones permanecerán cerca por un tiempo. Y cuanto más cerca las condiciones iniciales más tiempo permanecerán cerca las soluciones. Si bien esto parece bastante obvio no es tan fácil de demostrar, por lo que simplemente enunciaremos este teorema.

Teorema 0.4. ***Continuidad respecto a las condiciones iniciales.***

Sea $\varphi(t)$ la solución maximal a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$ con f en las hipótesis de Picard. Entonces:

$$\text{dado } T \in I(t_0, x_0) \text{ y } \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(T, \epsilon) > 0/\ \|x_0 - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\| < \epsilon \text{ con } t_0 < t < T$$

donde $\bar{\varphi}(t)$ es una solución a $\dot{x} = f(t, x)$ con $\bar{\varphi}(t_0) = \bar{x}$.

¿Que nos esta diciendo este teorema? Que si nosotros queremos que dos soluciones distintas permanezcan cerca (a una distancia menor que ϵ) hasta un tiempo $T \in I(t_0, x_0)$, basta con considerar las condiciones iniciales lo suficientemente cerca. ¿Que tan cerca tienen que estar las condiciones iniciales? Tener una distancia menor a δ, la cual depende de ϵ y T.

Por ejemplo, consideremos el problema $\dot{x} = x$. Sabemos que las soluciones a este problema son $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$ y el cero es un punto de equilibrio inestable. Sin embargo, aunque sea inestable veremos que podemos mantenernos cerca del cero por determinado tiempo si nuestra condición inicial es suficientemente chica. Consideremos la solución $x(t)$ con condición inicial $(0, 0)$ y otra más genérica $(0, x_0)$. Si queremos que ambas soluciones se mantengan a una distancia menor a ϵ un tiempo T tenemos que:

$$\sup_{t \in (t_0, T)} |x_0 e^t - 0| = x_0 e^T < \epsilon \Rightarrow x_0 < \epsilon\ e^{-T}$$

Considerando una condición inicial menor a ese número las soluciones cumplirán lo pedido.

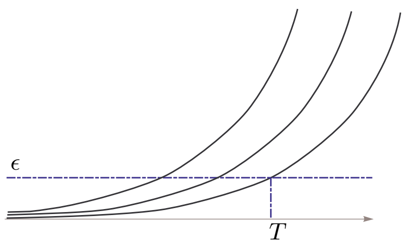


Figura 1. Continuidad respecto a las condiciones iniciales.

0.1.2. Intervalo maximal

A continuación veremos tres teoremas que nos permitirán deducir como es el intervalo maximal de una solución.

El primer teorema nos dice que no podemos encerrar al par $(t, \varphi(t))$, lo que representa el gráfico de la solución, en un compacto si estamos en las hipótesis de Picard. Siempre existirá un tiempo que pertenezca al intervalo maximal, tanto en el futuro como en el pasado, donde el gráfico se escape del compacto.

Esto implicará que, en las hipótesis de Picard, las soluciones tendrán que estar definidas para todo tiempo o no estar acotadas si el intervalo maximal esta acotado.

Se recuerda que:

- Toda sucesión en $\mathbb{R}^n$ que sea acotada tiene una subsucesión convergente.
- Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.
- Toda sucesión convergente dentro de un cerrado, converge a un punto del conjunto. En consecuencia, toda sucesión convergente en un compacto converge a un punto del conjunto.

Haremos un corto resumen del teorema, ya que puede no ser fácil entenderlo. El teorema se divide en dos casos, el primero en el cual el intervalo maximal es todo $\mathbb{R}$ y la demostración es directa, el segundo donde el intervalo maximal está acotado en el futuro (es análogo para el pasado). Para el caso que el intervalo maximal esta acotado en el futuro por $b \in \mathbb{R}$ trataremos de demostrarlo por el absurdo. En este caso, el teorema consiste en suponer que $(t_n, \varphi(t_n))$, donde $t_n = b - \frac{1}{n}$, esta incluido en un compacto $K \subset \Omega$. En caso de que algo así suceda podemos definirnos una subsucesión convergente que tienda a un punto $(b, \bar{x}) \in K$[1]. Por el segundo item del Teorema de Picard existe un entorno U y un $\alpha > 0$ tal que las soluciones a cualquier condición inicial dentro de U tiene una única solución de tamaño 2α. Sin embargo, si la subsucesión converge a $(b, \bar{x})$ podemos acercarnos tanto como queramos, llegando a un punto como muestra la figura (2).

Aplicando Picard a la ecuación con condición inicial (t_1, x_1) sabemos que existe una única solución entre $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$ de modo que podemos extender la solución un poco más de b. Esto es absurdo ya que el intervalo maximal es hasta b. En conclusión $(t, \varphi(t))$ no podrá estar incluido en un compacto.

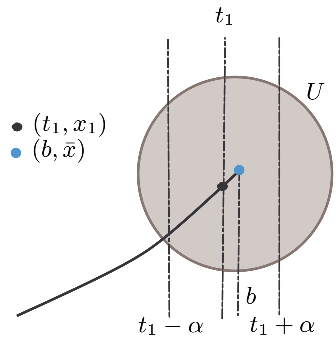


FIGURA 2. Escape de compactos.

Teorema 0.5. ***Escape de Compactos.***

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente de Lipschitz según la variable espacial y continua, $K \subset \Omega$ un conjunto compacto y $\varphi : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal a la ecuación diferencial $\dot{x} = f(t, x)$ con condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$. Entonces:

$$\exists\ t_1 < t_0,\ \ t_1 \in I(t_0, x_0) /\ (t_1, \varphi(t_1)) \notin K$$

$$\exists\ t_2 > t_0,\ \ t_2 \in I(t_0, x_0) /\ (t_2, \varphi(t_2)) \notin K$$

Demostración:

[1] Por lo que se recordó previamente.

Probaremos la existencia de t_2, la existencia de t_1 es análoga. Llamemos (a, b) al intervalo maximal $I(t_0, x_0)$. Si $b = +\infty$ no hay nada que probar, ya que $(t, \varphi(t))$ no está acotado y por lo tanto no está contenido en un compacto.

Ahora veremos que pasa para cuando $b \in \mathbb{R}$ $(b < +\infty)$. Trataremos de demostrar este caso por el absurdo, es decir, supondremos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t > t_0$, $t \in I(t_0, x_0)$ y llegaremos a una contradicción, por lo que $(t, \varphi(t))$ no podrá estar contenido en K. Llamando $t_n = b - \frac{1}{n}$, podemos considerarnos la sucesión

$$(t_n, \varphi(t_n)) \in K \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Si suponemos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t \in I(t_0, x_0)$, $t > t_0$, entonces esta sucesión también tendrá que estar incluida en K. En este caso tenemos una sucesión acotada, por lo que la misma tiene una subsucesión convergente. Además, como la subsucesión está incluida en K (cerrado), la misma converge a un punto del conjunto, es decir:

$$(t_{n_r}, \varphi(t_{n_r})) \to (b, \bar{x}) \in K$$

Por la segunda versión del teorema de Picard, sabemos que existe un entorno U alrededor de $(b, \bar{x})$ y $\alpha > 0$ tal que para todo $(t_1, x_1) \in U$ existe una única solución definida en $(t_1 - \alpha, t_1 + \alpha)$. Como la subsucesión converge a $(b, \bar{x})$ podemos acercarnos tanto como queramos a ese punto, por lo que:

$$\exists\, r_0 /\ t_{n_{r_0}} > b - \alpha \text{ y } (t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}})) \in U$$

Ahora bien, si consideramos la solución con condición inicial $(t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}}))$ sabemos que la misma esta definida hasta $t_{n_{r_0}} + \alpha > b$. Por otro lado, este punto pertenece a la solución $\varphi(t)$ y dado que existe una única solución maximal se cumple $I(t_0, x_0) = I(t_{n_{r_0}}, \varphi(t_{n_{r_0}})) = (a, b)$. Pero esto es absurdo, ya que $t_{n_{r_0}} + \alpha > b$ (figura (2)). En ese caso se refuta nuestra suposición, que era que $(t, \varphi(t))$ estuviese incluido en K para todo $t \in I(t_0, x_0)$, $t > t_0$. $\square$

Ahora veremos otro teorema, que consiste en comparar dos soluciones de distintas ecuaciones diferenciales. Este teorema nos servirá para hallar el intervalo maximal en ecuaciones en $\mathbb{R}$. Este último es bastante intuitivo. Lo que dice, es que si tenemos dos ecuaciones diferenciales con $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ con la misma condición inicial, la solución φ_1 asociada a f_1 es menor a φ_2 asociada a f_2 para tiempos mayores a t_0. Esto es lógico, ya que si $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ la derivada del primer problema es menor a la del segundo problema, por que lo sus soluciones crecen más lento.

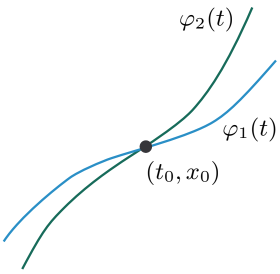


Figura 3. Comparación.

Teorema 0.6 (Comparación de ecuaciones diferenciales).

Sean los problemas:

$$(*_1) \begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (*_2) \begin{cases} \dot{x} = f_2(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con $f_1 : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ en las hipótesis de Picard tal que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ para todo $(t, x) \in \Omega$. Sea $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ la solución a $(*_1)$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ la solución a $(*_2)$. Entonces:

$$\varphi_1(t) > \varphi_2(t),\ \forall\, t < t_0, t \in I_1 \cap I_2$$

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t),\ \forall\, t > t_0, t \in I_1 \cap I_2$$

Demostración:

Consideremos la función $D(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$. Si realizamos la derivada:

$$\dot{D}(t) = \dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t) = f_1(t, \varphi_1(t)) - f_2(t, \varphi_2(t))$$

Dado que $f_1(t_0, x_0) < f_2(t_0, x_0)$ y las funciones son continuas existe un entorno U de (t_0, x_0) tal que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ para todo $(t, x) \in U$. Como las soluciones a las ecuaciones diferenciables también son continuas podemos definir un intervalo de tiempo donde $(t, \varphi_i(t))$ este en U. Más formalmente, existe $t_1, t_2 \in I_1 \cap I_2$ con $t_1 < t_0 < t_2$ tal que:

$$(t, \varphi_i(t)) \in U, \ \forall \ t \in (t_1, t_2) \text{ con } i = 1, 2.$$

Por consiguiente:

$$\dot{D}(t) < 0 \text{ con } t_1 < t < t_2.$$

Dado que la función D esta decreciendo y $D(t_0) = \varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0) = 0$ se cumple que:

$$\varphi_1(t) > \varphi_2(t), \ t_1 < t < t_0$$

$$\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \ t_0 < t < t_2$$

Supongamos que φ_1 y φ_2 se vuelven a cruzar en algún tiempo $t_3 > t_0, t_3 \in I_1 \cap I_2$, es decir que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t), \ t_0 < t < t_3$ y $\varphi_1(t_3) = \varphi_2(t_3)$. Entonces aplicando lo que concluimos recién en t_3 tendría que pasar que $\varphi_1(t) > \varphi_2(t)$ para $t_0 < t < t_3$. Pero esto es absurdo. Podemos hacer el mismo razonamiento si suponemos que se cruzan en el pasado, dejando demostrado el teorema. □

El último teorema que nos puede servir en algunos casos para hallar el intervalo maximal es el siguiente.

Teorema 0.7.

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en las hipótesis de Picard tal que $f(t, x(t))$ está acotada. Entonces las soluciones al problema $\dot{x} = f(t, x)$ están definidas para todo tiempo.

La demostración queda a cargo del lector. Se sugiere acotar la solución mediante la fórmula:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) \ ds.$$

0.1.3. Ejemplos prácticos

En lo que queda del capítulo veremos ejemplos utilizado el teorema de Picard y sus consecuencias.

***Ejemplo* 0.2.**

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = x^4 - 1.$$

Tratemos de graficar las soluciones a este problema sin resolver la ecuación, utilizando los teoremas que hemos visto y estudiando el signo de la de la derivada. Viendo donde se anula $\dot{x}$ tenemos que 1 y -1 son puntos de equilibrio. Por otro lado las soluciones crecen para x mayores a 1 o menor que -1, mientras que decrece entre -1 y 1.

Además, esta ecuación se encuentra en las hipótesis de Picard en todo $\mathbb{R}^2$ por lo que para cualquier condición inicial tenemos una única solución. En consecuencia, las soluciones no podrán cortarse, ya que no se respetaría la unicidad en el punto de corte. Gracias a esto último las soluciones estacionarias nos dividirán el plano en tres. Las soluciones que están por arriba del 1, entre el -1 y 1 y por debajo de -1 no podrán pasar de una zona a otra.

Caso $-1 < x_0 < 1$:

En este caso las soluciones serán decrecientes. Dado que estamos en las hipótesis de Picard podemos usar el teorema de escape de compactos. Consideremos el compacto $K_1 = [a, b] \times [-1, 1]$ donde $a < t_0 < b$ dibujado en la figura (4). Por el teorema ya mencionado, si consideramos $\varphi(t)$ la solución maximal de esta ecuación sabemos que $(t, \varphi(t))$ debe escaparse de ese compacto tanto en el futuro como en el pasado. Sin embargo $(t, \varphi(t))$ no puede escaparse por arriba ni por abajo, ya que no respetaría la unicidad de las soluciones. En consecuencia la gráfica de la solución debe escaparse por los costados lo que implica que debe existir un $t_1, t_2 \in I(t_0, x_0)$ donde $t_1 < a$ y $t_2 > b$. Esto sucede para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$, de donde podemos concluir que el intervalo maximal de la solución sera todo $\mathbb{R}$.

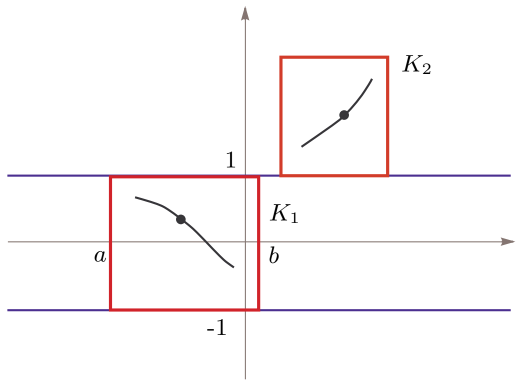


FIGURA 4. Ejemplo con escape de compactos.

Dado que las soluciones tendrán que ser siempre decrecientes y están acotadas, las mismas tendrán que tener una asíntota horizontal. Recordar que la derivada tiende a cero en una asíntota horizontal. Mirando la forma de $\dot{x}$ vemos que esto solo sucede cuando nos acercamos a 1 o -1. Con esta información podemos concluir que las soluciones de esta zona serán de la forma de la figura (6).

Caso $x_0 > 1$:

Si ahora consideramos un compacto K_2 como el de la figura (4), sabemos que el gráfico de solución no podrá escaparse por debajo ya que no puede cortar la recta $x = 1$. En este caso no tenemos una cota superior (al menos no que sepamos). De todas formas escape de compactos nos permitirá sacar conclusiones de como es el intervalo maximal en el pasado. Dado que la soluciones son crecientes en esa zona, sabemos que en el pasado tampoco podrá escaparse por la parte de arriba del compacto, de modo que tendrá que escaparse del lado temporal. Razonando igual que en caso anterior, podemos deducir que el intervalo maximal será de la forma $I(t_0, x_0) = (-\infty, b)$, donde b podría ser infinito, y que las soluciones tienden a 1 cuando el tiempo tiende a menos infinito.

Nos faltaría ver que sucede en el futuro. Para esto utilizaremos el teorema 3. Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Este problema es fácil de resolver por variables separables, obteniéndose que las soluciones son de la forma:

$$x(t) = \frac{1}{1/x_0 + t_0 - t}$$

Vemos que estas soluciones no están definidas para todo tiempo, ya que se anula el denominador en el tiempo $t^* = t_0 + 1/x_0$. Cuando la condición inicial es $x_0 > 0$ nos encontramos con que el intervalo maximal está acotado superiormente ($t^* > t_0$), mientras que para $x_0 < 0$ el intervalo maximal está acotado inferiormente ($t^* < t_0$).

Si llamamos $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^4 - 1$ sabemos que existe un $k > 0$ tal que para $x > k$ se cumple que $f_1(x) < f_2(x)$ (por el grado de los polinomios). Si $x_0 > k$, podemos considerar (I_1, φ_1) la solución maximal a $\dot{x} = f_1(x)$ y (I_2, φ_2) la solución maximal a nuestro problema original $\dot{x} = f_2(x)$ ambas con condición inicial (t_0, x_0). Como $x_0 > k > 0$, $I_1 = (-\infty, t^*)$. Dado que φ_1 y φ_2 son crecientes, si $x_0 > k$ también lo serán las soluciones en el futuro (en el futuro nos mantendremos en la zona donde vale la desigualdad), lo que nos permitirá usar el teorema de comparación. Por el teorema ya mencionado tenemos que $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ para todo $t > t_0$ y $t \in I_1 \cap I_2$.

Sabemos que φ_1 se va a más infinitoen t^*, de modo que si φ_2 está definida hasta t^* también tendrá que irse a más infinito (figura (5.a)). En conclusión $I_2 = (-\infty, b)$, donde $b \leq t^*$ (observar que la solución φ_2 podría haberse escapado a más infinito antes que φ_1). Claramente el valor de b depende de las condiciones iniciales (t^* depende de (t_0, x_0)).

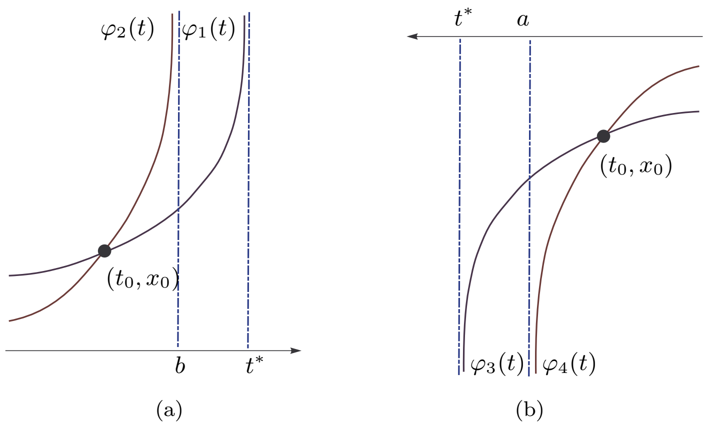


FIGURA 5. Ejemplo usando el teorema 3.

Podemos observar que las soluciones a $\dot{x} = x^4 - 1$ con condición inicial $x_0 > 1$ no pueden estar acotadas. Esto lo podemos deducir ya que en caso de estar acotadas, podemos razonar de forma análoga a cuando la condición inicial se encontraba entre -1 y 1, concluyendo que las soluciones tendrían que tener una asíntota horizontal mayor a 1. Sin embargo, la derivada de $\dot{x}$ es continua y vale cero solo en 1 y -1, por lo que no es posible que tenga una asíntota horizontal en otro valor. Por lo tanto las soluciones van a alcanzar en algún momento el valor k mencionado en el párrafo anterior y una vez alcanzado podemos aplicar el teorema 3, deduciendo que $I(t_0, x_0) = (-\infty, b)$ con $b \in \mathbb{R}$ para $x_0 > 1$.

Caso $x_0 < -1$:

Podemos proceder de forma análoga al caso anterior. Por escape de compactos podemos deducir que el intervalo maximal no está acotado superiormente. Luego para el pasado podemos utilizar el teorema 3. Llamaremos (I_3, φ_3) la solución maximal de $\dot{x} = x^2$ y (I_4, φ_4) la solución maximal de $\dot{x} = x^4 - 1$ con la misma condición inicial (t_0, x_0). En este caso, estamos en condiciones iniciales negativas por lo que $I_3 = (t^*, +\infty)$. Dado que ahora nos hace falta saber como es el intervalo maximal en el pasado, consideramos la desigualdad para tiempos menores a t_0, donde tenemos que $\varphi_4(t) < \varphi_3(t),\ \forall\, t < t_0, t \in I_3 \cap I_4$. Razonando igual que el caso anterior, deducimos que el intervalo maximal para una condición inicial $x_0 < -1$ tiene la forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$ que depende de (t_0, x_0) (figura (5.b)).

Por último recordemos que al ser una ecuación diferencial autónoma, las soluciones tienen la misma forma independientemente de t_0, pero corridas en el tiempo. Teniendo en cuenta estas cosas, un buen bosquejo de las soluciones es el siguiente.

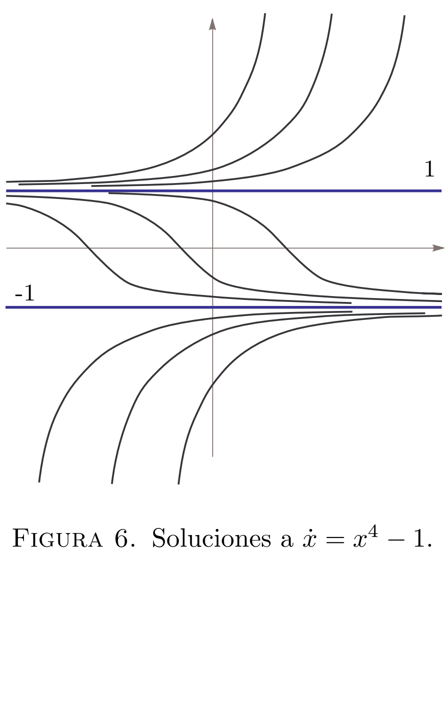


FIGURA 6. Soluciones a $\dot{x} = x^4 - 1$.

○

¿Como saber que teorema usar? Escape de compactos sirve cuando sabemos que la solución esta acotada. Si esta acotada superior e inferiormente, seguro tendrá que escaparse por la variable temporal. Si esta acotada solo superiormente o inferiormente, ahí habrá que fijarse el signo de la derivada, como nos pasó en este ejemplo.

Verán que es bastante intuitivo darse cuenta si el intervalo maximal está acotado superior o inferiormente en ecuaciones diferenciales sencillas. Si consideramos el problema:

$$\dot{x} = x^{\alpha},\ \ \alpha > 0$$

por variables separables obtenemos que la solución a este problema es:

$$x^{1-\alpha}(t) = x_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)(t-t_0),\ \text{si } \alpha \neq 1$$

$$x(t) = x_0 e^{t-t_0},\ \text{si } \alpha = 1.$$

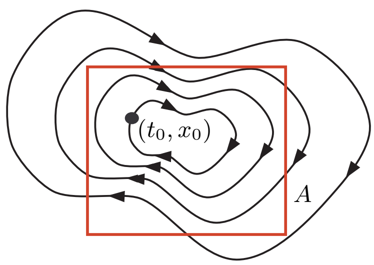
Si $1-\alpha < 0$, $x(t)$ será un cociente y por lo tanto, no estará definida cuando se anule el denominador. En consecuencia se cumple que:

$$\text{si } \alpha > 1 \Rightarrow \ \text{la solución no está definida para todo tiempo}$$

$$\text{si } 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \ \text{la solución está definida para todo tiempo.}$$

Para ecuaciones diferenciales con $f(t,x) > x^{\alpha}$, con $\alpha > 1$, la derivada ya es demasiado grande y la solución se va a infinito en un tiempo finito. Generalmente las soluciones que se utilizan para comparar son de la forma $\dot{x} = ax^{\alpha}$, dado que estas son fáciles de resolver y ya vimos cuales están definidas para todo $\mathbb{R}$ y cuales no.

Recordar que al usar escape de compactos el compacto siempre debe estar incluido en $\mathbb{R}^{n+1}$. Un clásico error es decir que las soluciones deben escaparse de un compacto y no es la solución, si no el gráfico de la solución el que debe escaparse. Por ejemplo consideremos una ecuación diferencial en las hipótesis de Picard con el diagrama de fases de la siguiente figura:



La solución de esta ecuación con condición inicial (t_0, x_0) que llamaremos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está contenida en un compacto A. En este caso si queremos usar escape de compactos, el compacto K sale de la hoja. Considerando el compacto $K = [a,b] \times A$, con $a < t_0 < b$, vemos del diagrama que $\varphi(t) \subset A$, de modo que el gráfico de la solución deberá escaparse del lado temporal, de donde podemos concluir que las soluciones están definidas para todo tiempo.

***Ejemplo* 0.3.**

Consideremos ahora el siguiente problema:

$$\dot{x} = t - x^2.$$

Tratemos de bosquejar las funciones con las herramientas que tenemos. Se verifica rápidamente que $f(t,x)$ es continua y que la derivada respecto a x también lo es, de modo que estamos en las hipótesis de Picard. Comenzaremos estudiando el signo de f para hacernos una primera idea de como serán las soluciones.

Para empezar vemos que esta ecuación no tiene puntos de equilibrio. La derivada es nula en la parábola $t = x^2$, por lo que las soluciones tendrán que cruzar esta curva con pendiente nula. Dentro de la parábola la derivada es positiva, y por fuera es negativa, de donde podemos concluir que las soluciones que cortan la curva venían decreciendo, la atraviesan con pendiente horizontal y luego crecen, por lo que las soluciones tendrán un mínimo en la curva $t = x^2$. También podemos deducir que las soluciones que atraviesan la curva tienen un mínimo observando que la derivada segunda es positiva en esos puntos.

$$\ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} \Rightarrow \ddot{x}(\dot{x} = 0) = 1$$

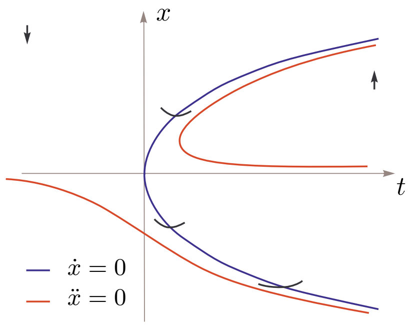


FIGURA 7

Dado que los puntos de la parábola son mínimos, una vez que las soluciones entran a la parábola no podrán salir. Esto es debido a que cuando entran a la parábola su derivada es positiva por lo que las soluciones estarán creciendo. Pero si cortarán la curva tendrían que tener un mínimo, lo cual no es posible ya que están creciendo. Observar que esto implica que las curvas que entran en algún momento deben cambiar su concavidad. Calculando donde las curvas cambian su concavidad ($\ddot{x} = 0$) tenemos que:

$$\ddot{x} = 1 - 2x\dot{x} = 1 - 2x(t - x^2) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2x} + x^2.$$

Para poder dibujar esta curva se recomienda realizar la curva de $t(x)$ y luego dibujar la inversa (simétrica respecto a la recta $x = t$). De modo que las soluciones luego de entrar a la parábola tendrán que cortar la curva roja de la figura (7). Estudiando el signo de la concavidad tenemos que la concavidad es negativa en la parte inferior y superior derecha y positiva en el resto del plano, lo que concuerda con lo dicho anteriormente.

Si las soluciones que entran a la parábola no pueden salir, tendremos una cota superior para las mismas, lo que nos permitirá sacar conclusiones utilizando el teorema de escape de compactos. Considerando el compacto de la figura (8). Sabemos que la solución dentro de la parábola es creciente y no puede cortar la curva $t = x^2$ en el futuro, de donde podemos concluir que el intervalo maximal no está acotado superiormente.

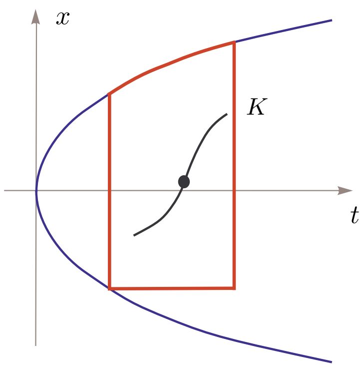


FIGURA 8. Escape de compactos ejemplo $\dot{x} = t - x^2$.

Esto no quiere decir que todas las soluciones estén definidas para todo tiempo en el futuro, ya que podrían haber soluciones que nunca entren a la parábola. Llamaremos φ_c a las soluciones que cumplen que $\varphi(0) = c$. Para $c \geq 0$, las soluciones entrarán a la parábola y en consecuencia su intervalo maximal no está acotado superiormente. Uno podría intuir que para valores cercanos a $c = 0$ negativos, las soluciones también entrarán a la parábola ya que su pendiente en $t = 0$ será casi horizontal por la continuidad de las derivadas (si $f(t,x) = t - x^2$, $f(0,0) = 0$). Pero veamos que pasa para c más chicos.

Consideremos el problema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x^2 \\ x(0) = c \end{cases}$$

Por variables separables obtenemos que las soluciones a este problema son:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{c}}$$

Estas soluciones para $x_0 < 0$están definidas para $t < -\frac{2}{c}$. Se cumple que $t - x^2 < -\frac{1}{2}x^2$ en la zona $t < \frac{1}{2}x^2$. Consideremos ψ una solución de $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$ como en la figura (9) con $\psi(0) = k$. Esta solución se mantiene en la zona donde $t - x^2 < -\frac{1}{2}x^2$. Por lo tanto, si consideramos φ_k la solución a $\dot{x} = t - x^2$ con $\varphi_k(0) = k$, por comparación obtenemos que $\varphi_k(t) < \psi(t)$ para $t > 0$ donde ambas soluciones estén definidas. Dado que ψ se va a menos infinito en un tiempo finito, también lo hará φ_k.

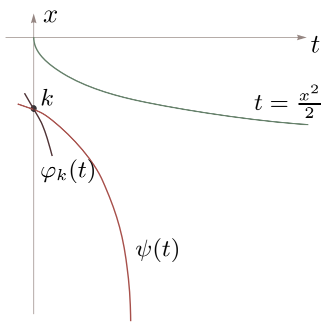


Figura 9. Comparación con la ecuación $\dot{x} = -\frac{1}{2}x^2$.

Para $c < k$, dado que las soluciones no se pueden cortar, φ_c tendrá que mantenerse por debajo de φ_k, de modo que tampoco estarán definidas para todo tiempo en el futuro.

En consecuencia, tendremos un conjunto de soluciones que entran a la parábola $t = x^2$ en determinado tiempo y están definidas para todo tiempo en el futuro y otro conjunto de soluciones que se escapan a menos infinito en un tiempo finito en el futuro. ¿Habrá alguna solución que este definida para todo tiempo pero que nunca entre a la parábola?

Definamos el conjunto $A = \{c \in \mathbb{R}/\ \varphi_c \text{ corta la curva } t = x^2\}$ y $B = \{c \in \mathbb{R}/\ I(0,c) = (a,b),\ \text{con } b \in \mathbb{R}\}$, donde $I(0,c)$ es el intervalo maximal de la solución $\varphi_c(t)$. Por lo que ya comentamos, el conjunto de los $c \geq 0$ pertenecen a A, mientras que para $c \leq k$ (siendo k el valor utilizado en la comparación) pertenecen a B. Estos valores de c mencionados no son los únicos que perteneces a A ni a B, simplemente son los que estamos seguros en que conjunto se encuentran.

Tanto el conjunto A como el B tendrán que ser conjuntos abiertos por el teorema de la continuidad respecto a las condiciones iniciales (teorema 0.4). Por ejemplo, supongamos que $B = (-\infty, d]$. Esto implica que para $c > d$, las soluciones φ_c si están definidas para todo tiempo en el futuro, ya que si no pertenecerían al conjunto B. Dado que $d \in B$ sabemos que existe un tiempo t^* donde φ_d se va a menos infinito. Por la continuidad de las soluciones tendríamos que poder encontrar un δ tal que las soluciones con $d < c < d + \delta$ estén tan cerca como queramos por un tiempo $T < t^*$. Sin embargo esto no es posible, ya que cuando T se acerca a t^*, φ_d tiende a menos infinito, alejándose del resto de las soluciones con $d < c < d + \delta$. Podemos pensar de forma análoga con el conjunto A.

Como el conjunto de los reales es conexo y A,B son dos abiertos disjuntos, claramente no pueden cubrir todo $\mathbb{R}$. Es decir, que existe al menos un c_0 que está definido para todo tiempo pero que no corta la curva. Observar que φ_{c_0} tendrá que estar contenida entre la curva $\ddot{x} = 0$ y $x = -\sqrt{t}$ para tiempos lo suficientemente grandes. Ver que φ_{c_0} es menor a $x = -\sqrt{t}$ es sencillo, ya que $c_0 < 0$ (los $c \geq 0$ cortan la curva $t = x^2$) y nunca entra a la parábola. Por otro lado, si la solución se mantuviera por debajo e la curva $\ddot{x} = 0$, la solución tendría una concavidad negativa, por lo que en algún momento saldría de la parábola $t = -\frac{1}{2}x^2$ (curva que aparecía en la comparación de ecuaciones diferenciales). Y si la solución saldría de la parábola $t = -\frac{1}{2}x^2$ por comparación obtendríamos que φ_{c_0} se va a menos infinito en un tiempo finito, lo cual es absurdo.

También podemos deducir que existe un único $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $c_0 \notin A$ y $c_0 \notin B$. Supongamos que existe φ_{c_0} y φ_{c_1} soluciones tal que ambas están definidas para todo tiempo pero no entran a la parábola $t = x^2$. Supongamos que $c_1 > c_0$, lo que implica que $\varphi_{c_1}(t) > \varphi_{c_0}(t)$. En ese caso tenemos que:

$$(\dot{\varphi_{c_1} - \varphi_{c_0}}) = (t - \varphi_{c_1}^2(t)) - (t - \varphi_{c_0}^2(t)) = \varphi_{c_1}^2(t) - \varphi_{c_0}^2(t) > 0.$$

Es decir, que la distancia entre φ_{c_1} y φ_{c_0} va aumentando. Pero esto es absurdo, ya que ambas soluciones tienen que estar entre las curvas $\dot{x} = 0$ y $\ddot{x} = 0$, las cuales se acercan cada vez más. En consecuencia, existe un único c_0 tal que φ_{c_0} está definida para todo tiempo en el futuro y no entra a la parábola.

Queda a cargo del lector, demostrar que las soluciones no están definidas para todo tiempo en el pasado. Observar que para tiempos negativos, se cumple que $t - x^2 < -x^2$. Ahora si, un bosquejo de las soluciones es el la imagen (10).

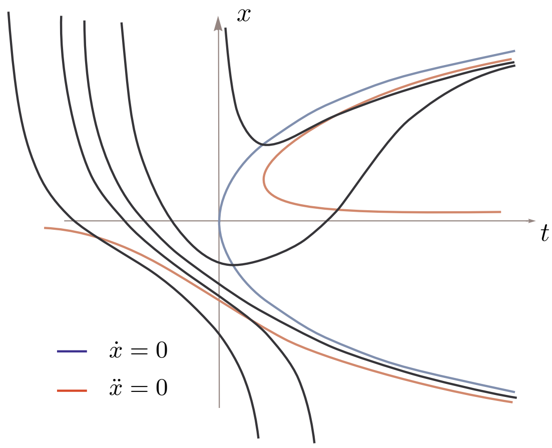


Figura 10. Soluciones a $\dot{x} = t - x^2$.

○

Es fácil darse cuenta que por Picard, los gráficos de las soluciones a ecuaciones diferenciales en $\mathbb{R}$ no pueden cortarse. Ya que, en caso de que se corten, si nuestra condición inicial es en ese punto tendríamos dos soluciones posibles. Consideremos la función $\varphi(t) = (t\sin(t), t^2\sin(t))$, donde su derivada es $\dot{\varphi} = (t\cos(t) + \sin(t), t^2\cos(t) + 2t\sin(t))$. Por lo tanto φ es solución a:

$$\begin{cases} \dot{x} = t\cos(t) + \sin(t) \\ \dot{y} = t^2\cos(t) + 2t\sin(t) \end{cases}$$

Este problema se encuentra en las hipótesis de Picard. Observar que $\varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = (0,0)$ y que $\dot{\varphi}(\pi) = (-\pi, -\pi^2)$, $\dot{\varphi}(2\pi) = (2\pi, 4\pi^2)$. Si graficamos la trayectoria de φ en un intervalo de tiempo que contenga a $[\pi, 2\pi]$ veríamos algo parecido a la siguiente imagen.

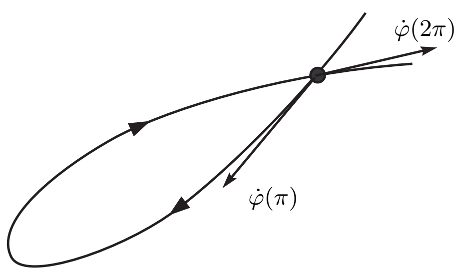


Figura 11. Ejemplo de ecuación no autónoma.

La solución da una vuelta y vuelve al punto $(0,0)$. Uno podría pensar, que si considero como condición inicial $(0,0)$ hay dos posibles soluciones. Por un lado, podría dar la vuelta y volver a pasar por el origen y por otro lado irse sin agarrar la vuelta. En consecuencia, no se cumpliría Picard. Esto no es cierto. Recordar que cuando nos referimos a una condición inicial no es solo la posición, la condición inicial contiene posición y tiempo inicial, es decir (t_0, x_0). Que agarre un camino o el otro depende del tiempo inicial (que $t_0 = \pi$ o $t_0 = 2\pi$). El gráfico de esta función $(t, \varphi(t))$ se encuentra en $\mathbb{R}^3$, en realidad ese punto que en la trayectoria se corta, no se corta en el gráfico de la función ya que está evaluado en distintos tiempo. En resumen, Picard no impide que las trayectorias de las soluciones se corten.

Claramente esta ecuación no es autónoma. Ademas de observarse en la ecuación diferencial, en una ecuación autónoma para una misma posición no podemos tener dos derivadas distintas. Veremos que **en las ecuaciones autónomas no pueden cortarse las trayectorias**. Como ya vimos en el primer capítulo, si tenemos una ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$ y $\varphi(t)$ una solución con $\varphi(0) = x_0$, las funciones $\varphi_{t_0}(t) = \varphi(t - t_0)$ también serán soluciones a la ecuación con condición inicial $\varphi(t_0) = x_0$, para todo $t_0 \in \mathbb{R}$.

Sea $\varphi(t)$ una solución a una ecuación diferencial autónoma y $\mathcal{C}_1$ la curva de su trayectoria. Sabemos que otras infinitas soluciones de la forma $\varphi_{t_0} = \varphi(t - t_0)$ tendrán la misma trayectoria pero recorrida a distinto tiempo. Si existiera otra solución $\phi(t)$ con su correspondiente curva de la trayectoria $\mathcal{C}_2$ que cortara la curva $\mathcal{C}_1$ en un tiempo $\bar{t}$ en $\bar{x}$ seguro podemos encontrar otra solución φ_{t_0} que pase por el mismo punto en el mismo tiempo. Por lo tanto la solución con condición inicial $(\bar{t}, \bar{x})$ no sería única.

Esto último podría generar ciertas confusiones en lo siguiente. Si consideramos el problema lineal:

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma (x_0e^t, y_0e^t) y el diagrama de fases como ya se vio anteriormente es un haz de rectas que pasan por el origen. Esto no contradice lo que deducimos recién. En cada recta se encuentran tres tipos de soluciones distintas, la solución estacionaria $(0, 0)$ y dos semirectas que salen desde el origen sin incluirlo. Esto lo podemos ver ya que si $x_0 \neq 0$ o $y_0 \neq 0$ la solución nunca alcanza el origen, solo tiende a el en el menos infinito. Por lo tanto, las trayectorias no se cortan.

0.1.4. Ecuaciones lineales

Ahora que conocemos el teorema de Picard, podremos ver algunas cosas más de las ecuaciones lineales. Empezaremos con el intervalo maximal de las soluciones a ecuaciones diferenciales lineales. Capítulos anteriores obtuvimos las soluciones para cualquier ecuación lineal autónoma y homogénea, las cuales vimos que estaban definidas para todo $\mathbb{R}$. A continuación estudiaremos el intervalo maximal de cualquier ecuación lineal. Veamos primero un lema que nos ayudará a estudiar el intervalo maximal.

Lema 0.8 (Gronwall).

Sea $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas, no negativas. Si existe $\alpha > 0$ tal que:

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\ ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

Entonces:

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Demostración:

Definiremos:

$$w(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)\ ds$$

Por las hipótesis podemos afirmar que la función w cumple que:

$$u(t) \leq w(t) \qquad 0 \leq w(t), \quad \forall t \in [a, b]$$

Si derivamos función w se obtiene lo siguiente.

$$\dot{w}(t) = u(t)v(t) \leq w(t)v(t) \Rightarrow \frac{\dot{w}}{w}(t) \leq v(t)$$

$$\Rightarrow \int_a^t \frac{\dot{w}}{w}(s)\ ds \leq \int_a^t v(s)\ ds. \Rightarrow Log(w(t)) \leq Log(w(a)) + \int_a^t v(s)\ ds = \alpha + \int_a^t v(s)\ ds$$

Entonces $w(t) \leq e^{\int_a^t v(s)ds}$, lo que implica que $u(t) \leq e^{\int_a^t v(s)ds}$.

□

Teorema 0.9.

Sean $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ *y* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *funciones continuas. Las soluciones maximales a la ecuación lineal*

$$\dot{x} = A(t)x + c(t)$$

están definidas en todo $\mathbb{R}$.

Demostración:

Trataremos de demostrarlo por el absurdo. Este problema se encuentra en las hipótesis de Picard, lo que nos asegura la existencia y unicidad de las soluciones para cualquier condición inicial. Sea $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ la solución maximal al problema con condición inicial (t_0, x_0). Supongamos que el intevalo maximal está acotado superiormente. Sea $I = (a, b)$, con $t_0 \in I$ (a puede ser $-\infty$) dicho intervalo. Análogamente se prueba que no puede estar acotado inferiormente. Sabemos que la misma debe verificar que:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\varphi(s) + c(s)\ ds \ \text{ para } t_0 \leq t < b.$$

$$\Rightarrow ||\varphi(t)|| \leq ||x_0|| + \int_{t_0}^{t} ||A(s)||||\varphi(s)||\ ds + \int_{t_0}^{t} ||c(s)||\ ds \ \text{ para } t_0 \leq t < b.$$

Dado que A y c son funciones continuas en $\mathbb{R}$, sabemos que las mismas en el intervalo cerrado $[t_0, b]$ están acotadas, por lo que:

$$||A(t)|| < M \quad ||c(t)|| < C, \qquad \forall\ t \in [t_0, b].$$

Utilizando esta acotación a la desigualdad anterior:

$$\Rightarrow ||\varphi(t)|| \leq ||x_0|| + C(b-a) + \int_{t_0}^{t} M||\varphi(s)||\ ds \ \text{ para } t_0 \leq t < b.$$

Llamaremos $\alpha = ||x_0|| + C(b-a)$. Esto solo puede ser nulo si c y x_0 fueran el vector nulo. En este caso, sabemos que la única solución al problema es la solución trivial, la cual está definida para todo $\mathbb{R}$. Fuera de esa caso, está acotación nos permitirá utilizar el lema anterior 0.8, utilizando $||\varphi(t)|| = u(t)$ y $M = v(t)$:

$$||\varphi(t)|| \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} M||\varphi(s)||\ ds \Rightarrow ||\varphi(t)|| \leq \alpha e^{M|t-t_0|} \leq \alpha e^{M(b-a)}.$$

Suponiendo que el intervalo maximal de las soluciones estaba acotado superiormente, concluimos que la solución está acotada superiormente. Considerando el compacto:

$$K = \left\{ (t, x) : t \in [a, b],\ ||x|| \leq \alpha e^{M(b-a)} \right\},$$

tenemos que $(t, \varphi(t)) \in K$ para todo $t \in (t_0, b)$. Por el Teorema de escape de compactos esto es absurdo. Por lo tanto $b = +\infty$. Análogamente se prueba que $a = -\infty$. □

Por último, vamos a probar que el conjunto de soluciones de la ecuación $\dot{X} = AX$ es un espacio vectorial.

Proposición 0.1. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y* $V = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n :\ \dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$. *Entonces* V *es un espacio vectorial de dimensión* n.

Demostración. Claramente V es un espacio vectorial. Vamos a probar que V tiene dimensión n.
Sean $e_1 = (1, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ las soluciones de la ecuación $\dot{X} = AX$ con $\varphi_i(0) = e_i$. Las funciones $\varphi_1, ..., \varphi_n$ existen por el Teorema de Picard. Vamos a probar que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es una base de V.
Sea $\varphi \in V$. Entonces $\varphi(0) = v \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \alpha_1.e_1 + \cdots \alpha_n e_n$.
Sea $\psi(t) = \alpha_1.\varphi_1(t) + \cdots \alpha_n\varphi_n(t)$. Entonces φ y ψ son soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = v \end{cases}$$

Por lo tanto, por el Teorema de Picard se tiene que $\varphi(t) = \psi(t) = \alpha_1.\varphi_1(t) + \cdots \alpha_n\varphi_n(t)$. Lo que muestra que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es un generador de V.
Falta probar que $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Sea $\alpha_1.\varphi_1(t) + \cdots \alpha_n\varphi_n(t) = 0$. Tomando $t = 0$ se tiene que

$0 = \alpha_1.\varphi_1(0) + \cdots \alpha_n\varphi_n(0) = \alpha_1.e_1 + \cdots \alpha_n e_n = 0$. Como $\{e_1, ..., e_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, se tiene que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

$\square$

Como coralario de este último resultado tenemos la siguiente proposición:

Corolario 0.1. *Sea la ecuación lineal de segundo orden* $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $V = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ a\ddot{\varphi}(t) + b\dot{\varphi}(t) + c\varphi(t) = 0$ *para todo* $t \in \mathbb{R}\}$. *Entonces* V *es un espacio vectorial de dimensión dos.*

Demostración. Lamando $y = \dot{x}$, se tiene que $\dot{y} = \ddot{x}$. Como $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ entonces

$$\dot{y} = \ddot{x} = -\frac{b}{a}\dot{x} - \frac{c}{a}x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x.$$

Por lo tanto la ecuación $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ se transforma en la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x \end{cases} \quad \text{o equivalentemete en} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

No es difícil probar que φ es solución de $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ si y solo si $(\varphi, \dot{\varphi})$ es solución de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Por la Proposición anterior, se tiene que el conjunto de soluciones de $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un espacio vectorial de dimensión dos, por lo tanto el conjunto de soluciones de $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ es un espacio vectorial de dimensión dos.

$\square$