# Práctico 4

1. Probar que existe más de una solución para la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^{1/2} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

2. Sea la ecuación:

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{4t^3x}{t^4+x^2} & \text{si} \quad (t,x) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) = (0,0) \end{cases}$$

   *a*) Probar que, para todo $c \in \mathbb{R}$, $x(t) = c^2 - \sqrt{t^4+c^4}$ es solución con condición inicial $x(0) = 0$.
   
   *b*) ¿Qué hipótesis del teorema de Picard no se verifica?

3. Para las siguientes ecuaciones

$$a) \quad \dot{x} = x^2 - 1 \quad b) \quad \dot{x} = \frac{1}{t^2-1} \quad c) \quad \dot{x} = x^2 \cos t$$

hallar, en función de la condición inicial $(t_0, x_0)$, el intervalo más grande donde está definida la solución correspondiente. Representar gráficamente dichas soluciones.

4. **Comparación de soluciones**

Sean $f_1$ y $f_2$ dos funciones de clase $C^\infty$ en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f_1(t,x) \leqslant f_2(t,x)$. Llamemos $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}$ a una solución de la ecuación $\dot{x} = f_1(t,x)$ y $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_2(t,x)$, y supongamos que existe $t_0 \in I_1 \bigcap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.

Demostrar que $\varphi_1(t) \leqslant \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \bigcap I_2$ mayor que $t_0$. ¿Qué ocurre si $t < t_0$?

5. Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que las soluciones de la ecuación $\dot{x} = t^2 + x^2$ están definidas en un intervalo acotado.

6. Sea la ecuación $\dot{x} = x^2 - 1$ con $x(0) = x_0$. Probar, usando salida de compactos, que toda solución maximal con $|x_0| < 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

7. Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = \cos(t + x)$.

   *a*) Buscar soluciones de la forma $x(t) = at + b$.
   
   *b*) Probar, usando salida de compactos, que todas las soluciones maximales están definidas en $\mathbb{R}$.
   
   *c*) Hallar el lugar geométrico de los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.
   
   *d*) A partir de las partes anteriores, realice un bosquejo del gráfico de las soluciones maximales para distintas condiciones iniciales.

8. *a*) Llamemos $u : I \to \mathbb{R}$ a la solución maximal de la ecuación $x\dot{x} - (1+x^2)t^2 = 0$ con condición inicial $x(0) = 1$. Hallar $u(t)$ y probar que el intervalo maximal $I$ contiene a $[0, +\infty)$.

b) Consideremos la ecuación:

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t,x) \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{*}$$

en donde:

$$F(t,x) = \frac{2}{\pi}\frac{1+x^2}{x}t^2 \arctan(x+t).$$

1) Determinar el dominio de definición de $F$.
2) Verificar que (*) se encuentra en las hipótesis del Teorema de Picard.
3) Sea $v : J \to \mathbb{R}$ la solución maximal de (*). Probar que $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \geq 0$ en el intervalo $J$.
4) Probar que el intervalo maximal $J$ contiene a $[0, +\infty)$.

9. **(Parcial 2003)** Se considera la ecuación diferencial $\dot{x} = e^{x^2}$ en la recta real $\mathbb{R}$.

   a) Probar que $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una solución si y solo si la función $\psi(t) = -\varphi(-t)$ definida en $(-b,-a)$ también es solución.
   b) Deducir que la solución maximal $\varphi_0(t)$ para la condición inicial $x(0) = 0$ está definida sobre un intervalo simétrico.
   c) Comparando con la ecuación $\dot{x} = x^2$, deducir que dicho intervalo es un intervalo acotado de la forma $(-a,a)$ y que $\varphi_0 : (-a,a) \to \mathbb{R}$ es biyectiva.
   d) Demostrar que la solución maximal para una condición inicial arbitraria $(t_0, x_0)$ es la función

   $$\varphi(t, t_0, x_0) = \varphi_0(t - t_0 + \varphi_0^{-1}(x_0))$$

   que está definida en el intervalo

   $$(t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) - a, t_0 - \varphi_0^{-1}(x_0) + a).$$

10. Supongamos que $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función de clase $C^1$ y que existe una función $v : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ continua tal que

$$\|f(t,x)\| \leqslant v(t)\|x\|$$

para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Demostrar que las soluciones maximales de la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.

11. Se considera la ecuación $\dot{x} = t^2 - x^4$.

   a) Estudiar el signo de $\dot{x}$.
   b) Sea $\mathcal{R} = \{(t,x) : \ t > x^2\}$ y $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ una solución tal que existe $t_0 \in (a,b)$ tal que $\varphi(t_0) \in \mathcal{R}$.
      1) Probar que $\varphi(t) \in \mathcal{R}$ para todo $t \geq t_0$ y $t \in (a,b)$.
      2) Probar que el intervalo maximal de $\varphi$ es no acotado superiormente.

12. Estudiaremos ahora cualitativamente la ecuación diferencial $\dot{x} = t - x^2$.

   a) Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las soluciones.
   b) Demostrar que para toda solución $\varphi = \varphi(t)$ existe $T \geqslant 0$ ( que depende de $\varphi$) tal que $\varphi(t) < t^{1/2}$ para todo $t > T$.

*c*) Para cada $c \in \mathbb{R}$, sea $\varphi_c$ la solución maximal que verifica $\varphi_c(0) = c$. Probar las siguientes afirmaciones:

1) Si $c \geqslant 0$ entonces $\varphi_c$ está definida para todo $t > 0$.
2) Existe $k < 0$ tal que para todo $c < k$ la solución $\varphi_c$ tiende a $-\infty$ en tiempo finito.
3) Existe un único valor $c_0$ tal que $\varphi_{c_0}$ está definida para todo $t > 0$ y

$$\lim_{t \to +\infty} (\varphi_{c_0}(t) + t^{1/2}) = 0.$$