Matriz fundamental

Continuaremos estudiando las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas autónomas pero ahora en $\mathbb{R}^n$. Obtendremos la solución analítica para algunos casos y mencionaremos como se podría obtener para los restantes.

Definiremos la matriz fundamental de una ecuación diferencial $\dot{X} = AX$ como la matriz $\varphi(t) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = I_{n\times n}(\text{matriz identidad}). \end{cases}$$

Dado que las columnas de la matriz resultante de multiplicar dos matrices es la primera matriz por la columna correspondiente de la segunda matriz, se puede observar que si consideramos $X_1, X_2, .., X_n$ las columnas de φ las mismas verifican que $\dot{X}_i = AX_i$. En otras palabras la matriz fundamental es la que contiene como columnas las soluciones $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de la ecuación homogénea con condición inicial $X_i(0) = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, donde el 1 se encuentra en la posición i.

Lo interesante de la matriz fundamental es que dado el problema:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

la solución al mismo es $X(t) = \varphi(t)X_0$. La verificación es sencilla ya que:

$$X(0) = \varphi(0)X_0 = IX_0 = X_0$$

$$\dot{X} = \dot{\varphi}X_0 = A\varphi X_0 = AX.$$

Por esta razón intentaremos hallar la matriz fundamental.

Si retomamos el problema que apareció en el capítulo anterior $\dot{X} = AX$ con $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ diagonal con valores propios a y d, vimos que las soluciones a este problema eran:

$$X(t) = (x_0 e^{at}, y_0 e^{dt})$$

o lo que es lo mismo:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Donde tenemos que la solución es una matriz por la condición inicial. Se puede observar que las columnas de esa matriz son las soluciones al problema con condición inicial (1,0) y (0,1) respectivamente, como debía cumplir la matriz fundamental. Estas soluciones se parecen a las soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = ax$, con $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y a real, donde la solución era $x(t) = e^{at}x_0$. Análogo a las soluciones en un problema unidimensional, llamaremos a esta primer matriz de la ecuación (0.1) como e^{At}. Definiremos la exponencial de una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ como:

$$e^A = \sum_0^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + ...$$

Lo que se puede asociar con el desarrollo de Taylor de e^a con a real. En particular:

$$e^{At} = \sum_0^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + ... \quad t \in \mathbb{R} \tag{0.2}$$

Veremos más adelante, que para el caso particular donde A es diagonal con valores propios a y d, esta serie coincide con la matriz de la igualdad (0.1).

Teorema 0.1.

La matriz fundamental de una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes $\dot{X} = AX$ *es* $e^{At} = \sum_0^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$.

Demostración:

Sea $\Phi(t) = e^{At}$, debemos demostrar que Φ cumple las dos condiciones necesarias para ser una matriz fundamental. La primera condición es fácil de verificar, ya que de la ecuación (0.2) se tiene que:

$$\Phi(0) = e^0 = I$$

donde solo sobrevive el primer término de la serie. Ahora resta comprobar que $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

$$\dot{\Phi} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{kA^k t^{k-1}}{k!} = A\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \overset{j=k-1}{=} A\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{A^j t^j}{j!} = A\Phi$$

donde en la tercera igualdad se utilizó que $(At)^0 = I$ por lo que la derivada del primer término se va, mientras que en la cuarta se hizo el cambio $j = k-1$. Acerca de la segunda igualdad, uno podría pensar que se cumple que la derivada de la serie es la serie de las derivadas por la linealidad de la derivada. Sin embargo al tener infinitos términos esto no tiene por que suceder. Más adelante verificaremos que se puede realizar este cambio entre la sumatoria y la derivada en este caso. $\square$

Hemos encontrado la solución a cualquier ecuación del la forma $\dot{X} = AX$! Pero escribir las soluciones con una serie no es muy práctico. A continuación presentaremos proposiciones que nos permitirán escribir la expresión de dicha solución de forma más sencilla.

0.1. A diagonalizable

Proposición 0.1.

Sea A *una matriz diagonal*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con valores propios λ_i *con* $i = 1, \dots, n$ *entonces:*

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Demostración:

Esta primera proposición la podemos demostrar directamente usando la definición de la matriz e^{At}. Dado que las potencias de A siguen siendo matrices diagonales de la forma:

$$A^k = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$e^{At} = I + t\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots$$

Por ende:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 + \frac{(t\lambda_1)^2}{2!} + \dots & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + t\lambda_n + \frac{(t\lambda_n)^2}{2!} + \dots \end{pmatrix}$$

usando que $e^{\lambda_i t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_i t^n}{n}$ (Taylor) para todo $t \in \mathbb{R}$ queda demostrada la proposición. $\square$

Pero, si la matriz es diagonalizable pero no diagonal, ¿podremos proceder de forma análoga al capítulo anterior, realizando un cambio de base que nos simplifique la expresión? La proposición siguiente nos demostrará que si.

Proposición 0.2.

Si existe P tal que $A = PBP^{-1}$ entonces $e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1}$.

Demostración:

Dado que $A = PBP^{-1}$ tenemos que:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(PBP^{-1})^k t^k}{k!}$$

Desarrollando el término $(PBP^{-1})^k$:

$$(PBP^{-1})^k = PBP^{-1}PBP^{-1} \dots PBP^{-1}.$$

Utilizando que $PP^{-1} = I$ se deduce de la igualdad anterior que:

$$(PBP^{-1})^k = PB^kP^{-1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Sustituyendo esta igualdad en la expresión de e^{At}:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{PB^kP^{-1}t^k}{k!} = P\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B^kt^k}{k!}\Big)P^{-1} = Pe^{Bt}P^{-1}.$$

$\square$

Recordando que para las matrices diagonalizables existe una matriz P con los vectores propios “colgados” en columnas que cumple que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal con los valores propios en ella y utilizando estas dos proposiciones podremos hallar la matriz fundamental de la misma. Esta proposición no solo se verifica para matrices diagonalizables, puede aplicarse a dos matrices A y B cualquiera que estén relacionadas por $B = PAP^{-1}$.

0.2. Matriz de Jordan

Estudiaremos ahora que sucede si la matriz A es de Jordan con valor propio λ. Para eso utilizaremos la siguiente propiedad[1] que nos facilitará llegar a la forma de e^{At} cuando tenemos una matriz de este estilo.

Propiedad 1. *Dadas dos matrices A y B tales que $A.B = B.A$ se cumple que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.*

[1] Esta propiedad se demostrará más adelante.

Proposición 0.3.

Sea J una matriz de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces:

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración:

Trataremos de utilizar la propiedad 1 para facilitar el procedimiento. Podemos reescribir la matriz J de la forma:

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde llamaremos $D = \lambda I$ y B a la segunda matriz. Dado que $DB = BD$ podemos utilizar la propiedad mencionada anteriormente. Como la matriz D es diagonal con la primera proposición se deduce que:

$$e^{Dt} = e^{\lambda t} I$$

y gracias a la propiedad 1:

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} e^{Bt}. \tag{0.3}$$

Se puede verificar, realizando las potencias de B, que al ir aumentando el exponente la diagonal de unos va bajando hasta volverse la matriz nula. Por lo que, para $k \geq n$, $B^k = 0$. La serie de e^{Bt} no será una serie infinita, sino que tendrá n términos. Realizaremos las cuentas para una matriz 4×4 para que se pueda visualizar de forma más sencilla la demostración, pero sucede lo mismo para una matriz $n \times n$. Utilizando la definición de la matriz exponencial para e^{Bt} tenemos que:

$$e^{Bt} = I + t \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B} + \frac{t^2}{2!} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^2} + \frac{t^3}{3!} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B^3}$$

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & 0 \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Por último utilizando la igualdad (0.3) se obtiene la fórmula que aparece en la proposición. □

0.3. Matriz con valores propios complejos

Empezaremos viendo una matriz de 2×2 y más adelante veremos que pasa para matrices más grandes.

Proposición 0.4.

Dada una matriz A de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ *entonces:*

$$e^{At} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

Demostración:

Análogamente al caso anterior, simplificaremos el problema separando la matriz A como suma de dos matrices más fáciles. Sea $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, podemos escribir la matriz A como:

$$A = B + C$$

como $BC = CB$ nuevamente por la propiedad 1

$$e^{At} = e^{at}e^{Ct}. \tag{0.4}$$

Para obtener e^{Ct}, escribiremos las potencias de C de la siguiente forma:

$$C^n = b^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Llamaremos a la matriz del lado derecho de la igualdad anterior E. Procederemos calculando algunas potencias de E para luego aplicar la definición de e^{Ct}.

$$E^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad E^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E^5 = E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede ver que luego de la quinta potencia se vuelve a la primer matriz. Por ende las potencias tendrán un ciclo de 4 matrices antes de volver a repetirse. En la diagonal habrá ceros en las potencias impares y en los pares ambos elementos coinciden, alternándose entre 1 y -1. Los otros dos elementos serán ceros en los pares y en los impares serán opuestos turnándose entre 1 y -1. Si ahora planteamos e^{Ct}:

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bt\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{(bt)^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{(bt)^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ...$$

$$\Rightarrow e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^4}{4!} + ... & bt - \frac{(bt)^3}{3!} + \frac{(bt)^5}{5!} - \dots \\ -bt + \frac{(bt)^3}{3!} - \frac{(bt)^5}{5!} + ... & 1 - \frac{(bt)^2}{2!} + \frac{(bt)^4}{4!} + ... \end{pmatrix}$$

Donde se encuentran los desarrollos de Taylor de $\sin(bt)$ y $\cos(bt)$, pudiendo deducir que:

$$e^{Ct} = \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

.

Volviendo a la ecuación (0.4) tenemos que:

$$e^{At} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}.$$

□

Tanto para las matrices 2×2 con valores propios complejos, o matrices $n \times n$ que mediante un cambio de base se pueden llevar a la forma de Jordan, gracias a la proposición 0.2 también sabremos las soluciones.

Sin embargo no todas las matrices podemos llevarlas a una de las formas vistas recientemente, por ejemplo una matriz que tenga valores propios complejos y reales. Para esos casos nos servirá la siguiente proposición, donde con esta ya podremos abarcar todas las posibles opciones.

Proposición 0.5.

Sea A una matriz de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B}_{n\times n} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{C}_{m\times m} \end{array} \right)$$

entonces:

$$e^A = \left(\begin{array}{c|c} e^{\mathcal{B}} & 0 \\ \hline 0 & e^{\mathcal{C}} \end{array} \right)$$

Esta propiedad se deduce de la siguiente igualdad:

$$A^k = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{B}^k_{n\times n} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{C}^k_{m\times m} \end{array} \right).$$

En consecuencia, no solo sabemos las soluciones en caso de tener una matriz diagonal, de Jordan o la matriz con valores propios complejos como en la proposición 0.4. Gracias a la proposición 0.5 sabemos que si la misma es una composición de estas o, por la proposición 0.2, si realizando un cambio de base podemos llevarla a la forma de una composición de estas, también encontraremos la solución. En conclusión, utilizando las proposiciones podemos hallar la solución de cualquier ecuación lineal homogénea con A constante.

Veremos un ejemplo de como resolver una ecuación diferencial mediante el cálculo de e^{At}.

***Ejemplo* 0.1.**

Consideremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3z \\ \dot{y} = -8 + y + 11z \\ \dot{z} = -2x + 4z \end{cases}$$

donde la matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -8 & 1 & 11 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

de la cual no podemos determinar de forma directa como es e^{At}. Por esa razón, realizaremos un cambio de variable para poder llevar la matriz a una más fácil. Procedemos con el cálculo de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ -8 & 1-\lambda & 11 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

Este polinomio tiene raíz evidente 1, por lo que bajando por Ruffini se puede obtener que los valores propios son 1 doble y 2. Para hallar los vectores propios v_1 y v_2 respectivamente, procedemos de la siguiente manera:

$$Av_1 = v_1 \to (A - I)v_1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Considerando $v_1 = (x, y, z)$, dado que las primeras dos filas no son L.I obtenemos que $x = z = 0$. En consecuencia, el subespacio propio de 1 es $S_1 = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ de donde obtenemos que $dim(N(A - I)) = 1$. De forma análoga para el subespacio propio de 2 se llega a que $S_2 = \{(x, 3x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Escogeremos como vectores propios a $v_1 = (0, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 3, 1)$. Necesitamos un tercer vector v_0 para poder realizar el cambio de base. El mismo debe verificar que:

$$Av_0 = v_0 + v_1 \Rightarrow (A - I)v_0 = v_1$$

Similar a como se realizó en el capítulo anterior en el ejemplo dentro de la sección de la base de Jordan, se obtiene que v_0 debe ser de la forma $(-3/2, y, -1)$, por lo que elegiremos $v_0 = (-3/2, 0, -1)$.

Escogiendo una base $\mathcal{B}$ con los vectores mencionados, $\mathcal{B} = \{(-3/2, 0, -1), (0, 1, 0), (1, 3, 1)\}$, la matriz P resultante es:

$$P = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que:

$$P^{-1}AP = B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

o lo que es lo mismo, $A = PBP^{-1}$. Se observa que la matriz B se puede separar en una matriz de Jordan y una diagonal(1×1). Por la proposición 5:

$$e^{Bt} = \left(\begin{array}{cc|c} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right)$$

Luego por la proposición 4:

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$$

De modo que:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & -2/5 \\ -6/5 & 1 & -9/5 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = 5 \begin{pmatrix} -3e^t + 2e^{2t} & 0 & 3(e^{2t} + e^t) \\ 2te^t + 6(e^{2t} - e^t) & 5e^t & -2te^t + 9(e^{2t} - e^t) \\ 2(e^{2t} - e^t) & 0 & 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Por último la solución ala ecuación diferencial con una condición inicial genérica es:

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) = 5 \begin{pmatrix} -3e^t + 2e^{2t} & 0 & 3(e^{2t} + e^t) \\ 2te^t + 6(e^{2t} - e^t) & 5e^t & -2te^t + 9(e^{2t} - e^t) \\ 2(e^{2t} - e^t) & 0 & 2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix} X_0$$

○

0.3.1. Ecuaciones lineales de grado n

Hasta ahora hemos estudiado ecuaciones de grado 1, es decir, donde aparece hasta la primera derivada. Veremos a continuación que una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes de grado n, podremos transformarlas en una ecuación lineal autónoma homogénea de grado 1, pero en $\mathbb{R}^n$.

***Ejemplo* 0.2.**

Sea el problema:

$$\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$$

La solución a este problema es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Si realizamos el cambio de variable $y = \dot{x}$ tenemos que $\dot{y} = \ddot{x}$. Despejando de la ecuación de segundo grado obtenemos que:

$$\ddot{x} = -x + 2\dot{x} = -x + 2y.$$

Por ende:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}.$$

Esta última ecuación la sabemos resolver. En particular esta ecuación se resolvió en el capítulo anterior, donde se obtuvo que:

$$(x(t), y(t)) = ((x_0 - y_0)e^t - e^t((x_0 - y_0)t - y_0), -e^t((x_0 - y_0)t - y_0))$$

Sin embargo, este vector no es una solución a nuestro problema original de segundo grado. La solución es solo la primer componente $x(t)$. ○

Análogamente a como se resolvió este problema, se pueden resolver problemas de mayor orden.

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de grado n.

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + a_{n-1} x^{(n-2)} + \ldots + a_3 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x = 0$$

Realizando los cambios de variables:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \\
&x_2 = \dot{x}_1 \\
&x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 \\
&\ \vdots \\
&x_{n-1} = \dot{x}_{n-2} = x_1^{(n-2)} \\
&x_n = \dot{x}_{n-1} = x_1^{(n-1)}
\end{aligned}$$

se obtiene el problema:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{x}_1 = x_2 \\
\dot{x}_2 = x_3 \\
\quad\vdots \\
\dot{x}_{n-1} = x_n \dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - \ldots - a_{n-1} x_{n-1} - a_n x_n
\end{array}\right. .$$