

Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión

Curso posgrado y educación permanente
2023

Docentes: Dr. Ing. Rodolfo Pienika rpienika@fing.edu.uy
MSc. Ing. Laura Rovira lrovira@ose.com.uy

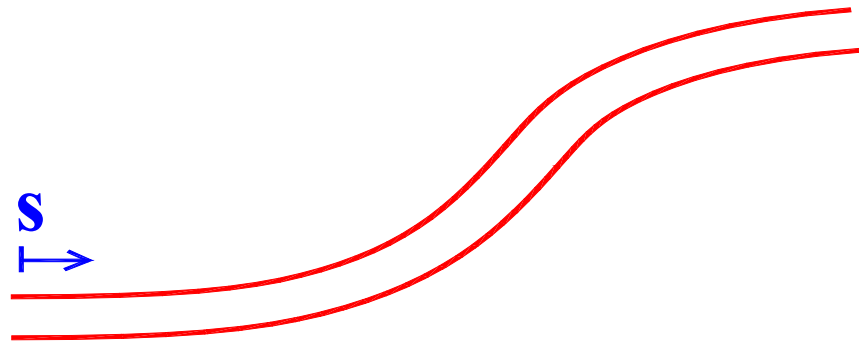
MODELO NO ESTACIONARIO EN TUBERÍA RÍGIDA Y FLUIDO INCOMPRESIBLE

Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión 2023

Modelo no estacionario de columna rígida

Hipótesis:

- tubería rígida
- fluido incompresible
- flujo **no estacionario**.



$V(s, t) = \frac{Q}{A}$ velocidad media

$h(s, t) = \frac{p}{\gamma} + z$ carga piezométrica

$z, \frac{p}{\gamma}$ cota y presión en el eje de la tubería

$\tau(s, t)$ tensión rasante sobre las paredes

Modelo no estacionario de columna rígida

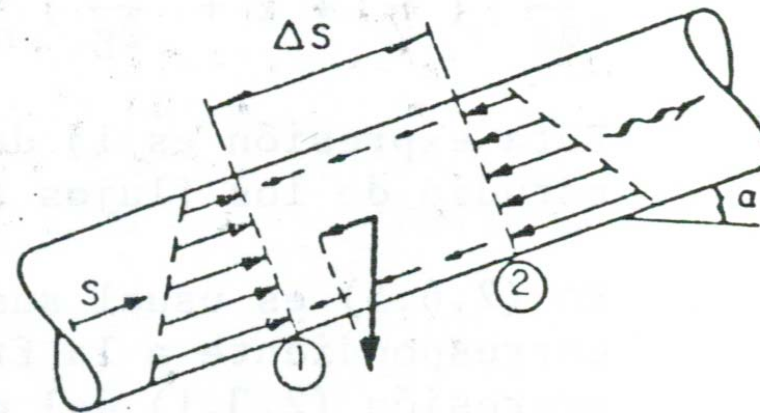
- Balance de masa: $Q_1(t) = Q_2(t)$
- Balance de fuerzas a un elemento de fluido, según la dirección de s :

$$ma = Rp - R\tau - Fg$$

Rp : resultante presiones

$R\tau$: resultante tensiones rasantes

Fg : Peso



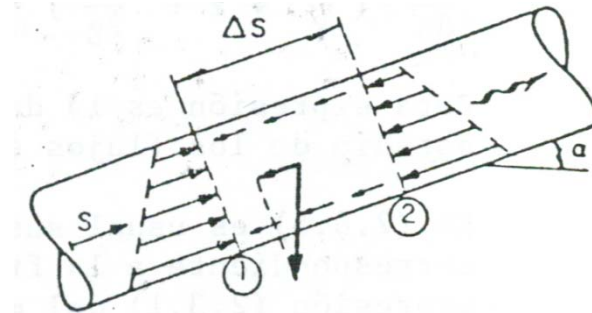
$$\rho \cdot \Delta s \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{dV}{dt} = (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \cdot \frac{\pi D^2}{4} - \tau \cdot \pi D \Delta s - \rho \cdot \Delta s \frac{\pi D^2}{4} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha)$$

Modelo no estacionario de columna rígida

- Trayectorias rectilíneas → Distribución hidrostática de presiones

- Dividiendo por el peso:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{\gamma \Delta s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \text{sen}(\alpha)$$



- Para Δs tal que $\Delta s \rightarrow 0$ se cumple:

$$\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\Delta s} = \frac{\partial p}{\partial s} ; \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{\partial z}{\partial s}$$

- Sustituyendo:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \frac{\partial z}{\partial s}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

□ Siendo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \cdot V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial s}$$

□ Sustituyendo:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial V^2}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \frac{\partial z}{\partial s}$$

□ Reagrupando:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) = -\frac{4\tau}{\gamma D}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) = -\frac{4\tau}{\gamma D} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Carga piezométrica: $h = \frac{p}{\gamma} + z$
- Carga total: $H = \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$
- **Tensión rasante** que la pared de la tubería ejerce sobre el fluido (τ):

$$\tau = f \frac{\rho V^2}{8}; \quad f = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

(ecuación válida para flujo estacionario)

- Sustituyendo:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2g} + h \right) = -\frac{fV^2}{2gD} - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

- Integrando entre dos secciones 1 y 2 (Ec. de Bernoulli generalizada):

$$h_2 - h_1 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

Pérdida piezométrica Pérdida por fricción Pérdida por inercia

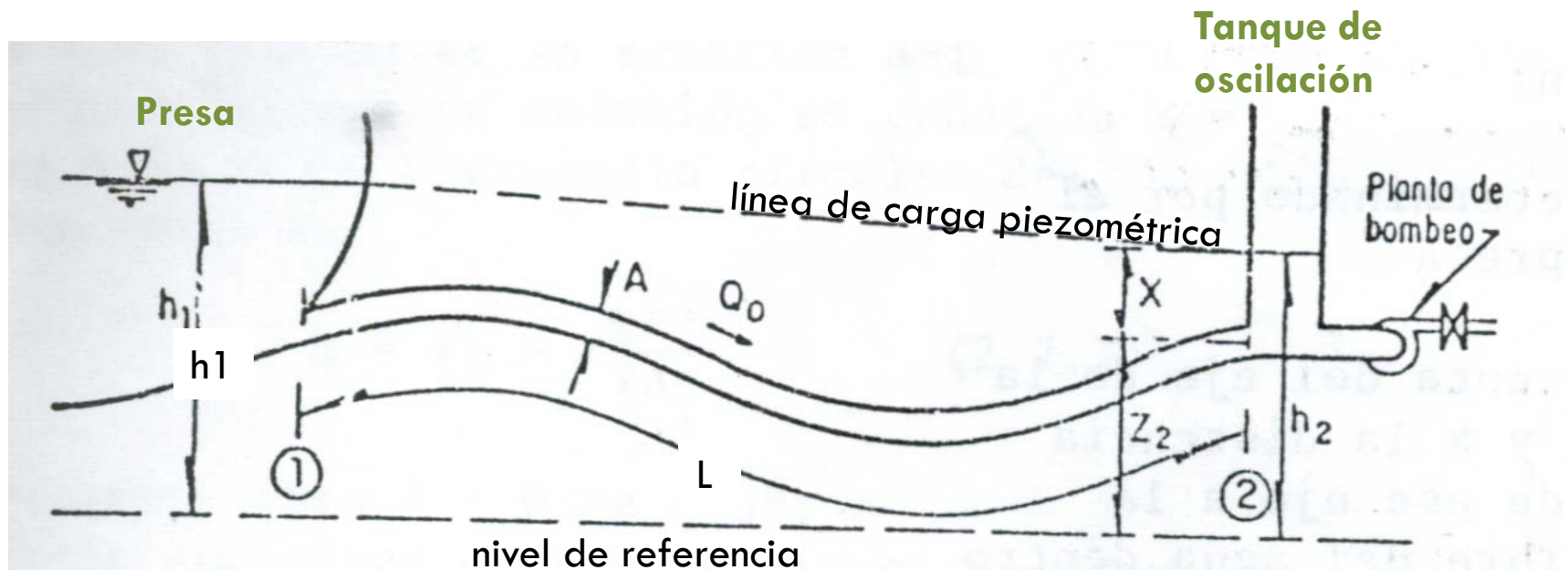
Hipótesis para las que es válida:

- Tubería rígida
- Fluido incompresible
- Flujo no estacionario

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

1. Oscilación de masa entre una presa y un tanque de oscilación



Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

- Ecuación de Bernoulli generalizada entre las secciones 1 y 2:

$$h_2 - h_1 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Condiciones de borde:

$$h_1 = h_0$$

$$h_2 = z_2 + x$$

Siendo,

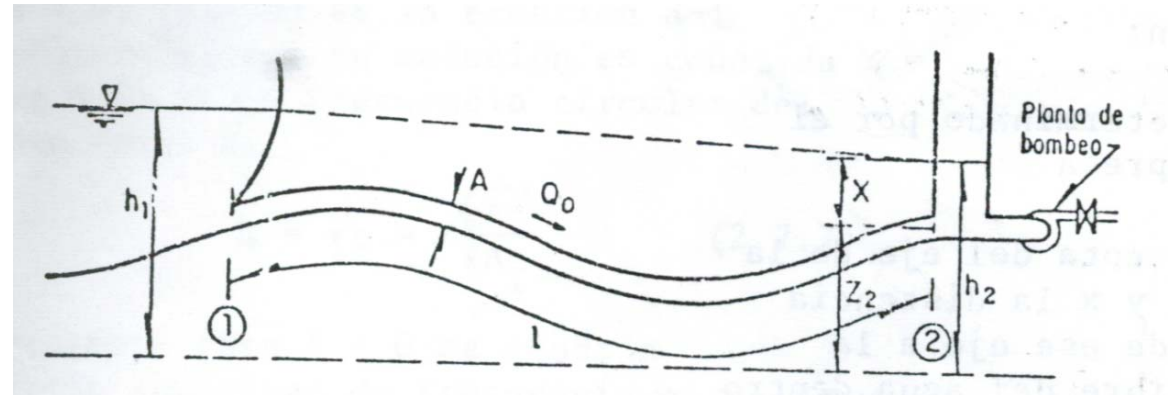
h_0 : nivel de la presa en 1 (constante)

z_2 : cota de eje de la tubería en 2 (constante)

x : distancia vertical desde eje de la tubería en 2 hasta la cota del nivel de agua en el tanque.

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones



- Conservación de la masa:

$$\dot{x}A_T = V(t)A \rightarrow V(t) = \dot{x} \frac{A_T}{A}$$

Siendo $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

- Condiciones iniciales (en $t=0$):

$$x(t=0) = x_0 = h_0 - \frac{fL V_0^2}{D 2g} - z_2$$

$$\dot{x}(t=0) = V_0 \frac{A}{A_T}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

- Imponiendo las condiciones de borde:

$$z_2 + x - h_0 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Imponiendo la conservación de la masa:

$$z_2 + x - h_0 = -\frac{fL}{D} \cdot \left(\frac{A_T}{A}\right)^2 \cdot \frac{\dot{x}|\dot{x}|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{A_T}{A} \cdot \ddot{x}$$

- Ordenando:

$$\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + cx = d$$

Siendo, $b = \frac{fA_T}{2DA}$; $c = \frac{gA}{LA_T}$; $d = (h_0 - z_2) \frac{gA}{LA_T}$

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

$$\ddot{x} + b\dot{x}|\dot{x}| + cx = d$$

- Si $b \neq 0 \rightarrow$ No integrable analíticamente, si numéricamente.
- Si $b=0 \rightarrow f=0$ (sin fricción) $\rightarrow \ddot{x} + cx = d$

Cambio de variable: $X = x - \frac{d}{c} \rightarrow \ddot{X} + cX = 0$

Como $c > 0$, se tiene la ecuación de movimiento armónico (masa-resorte), cuya solución es:

$$X = M \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Siendo la frecuencia de este movimiento: $\omega = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{gA}{LA_T}}$

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

- Condiciones iniciales en términos de la nueva variable X :

$$x(t = 0) = x_0 = h_0 - z_2 \rightarrow X(t = 0) = 0$$
$$\dot{x}(t = 0) = V_0 \frac{A}{A_T} = \dot{X}(t = 0)$$

- Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\emptyset = 0$$
$$M = \frac{V_0 A}{A_T \omega}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

Aplicaciones

□ $L = 5000\text{m}$

□ $A/AT = 0.05 = 1/20$

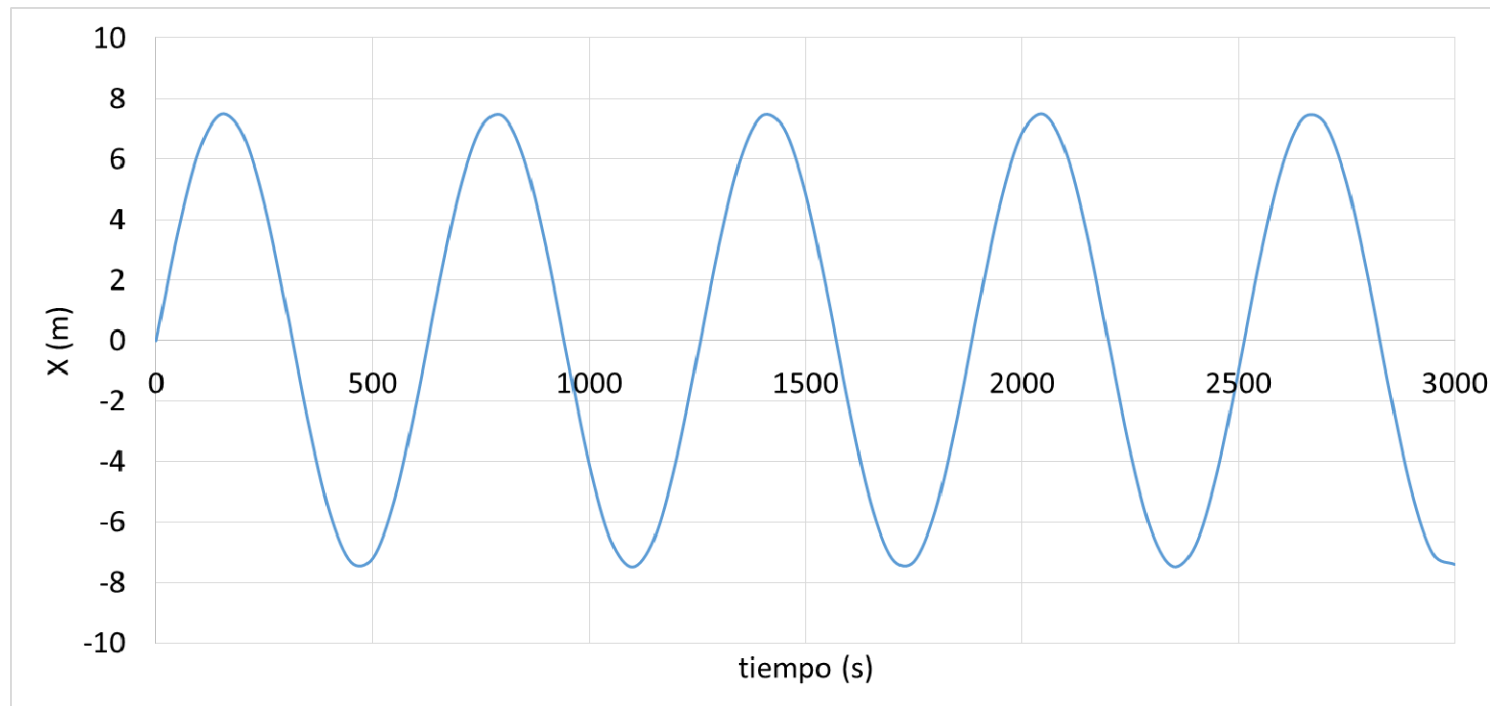
□ $V_0 = 1.5\text{ m/s}$



$w = 0.01\text{ hz}$

$T = 2\pi / w = 634\text{ s}$

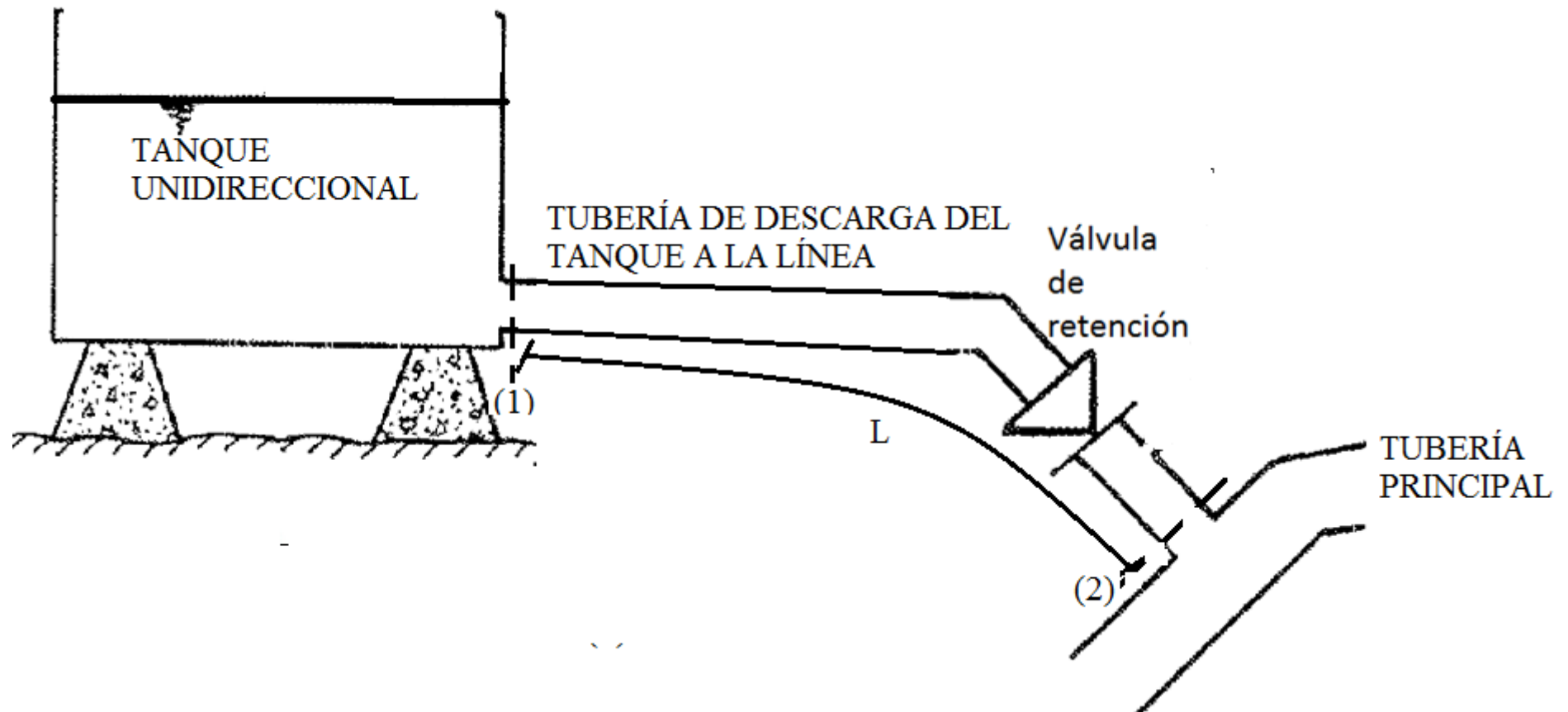
$M = 7,5\text{ m}$



Modelo de columna rígida no estacionario

Aplicaciones:

2. Tanque unidireccional



Modelo de columna rígida no estacionario

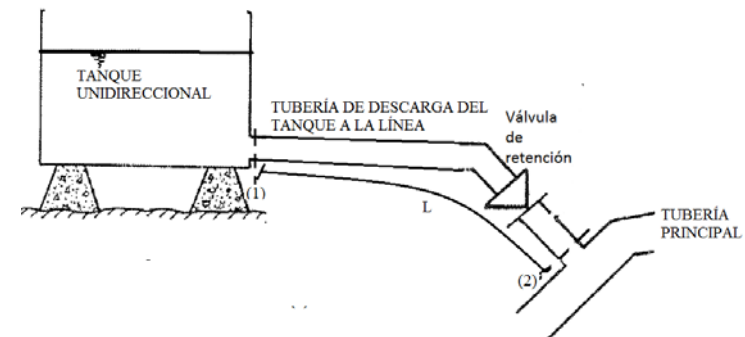
Aplicaciones:

- Ecuación de Bernoulli generalizada entre las secciones 1 y 2:

$$h_2 - h_1 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Condiciones de borde:

$$h_1 = h_0$$
$$h_2 = h(t)$$



- Condiciones iniciales:

$$V(t = 0) = 0$$

Modelo de columna rígida no estacionario

Aplicaciones:

$$h_2 - h_1 = -\frac{fL}{D} \cdot \frac{V|V|}{2g} - \frac{L}{g} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Otras hipótesis:

Se desprecia la fricción ($f = 0$).

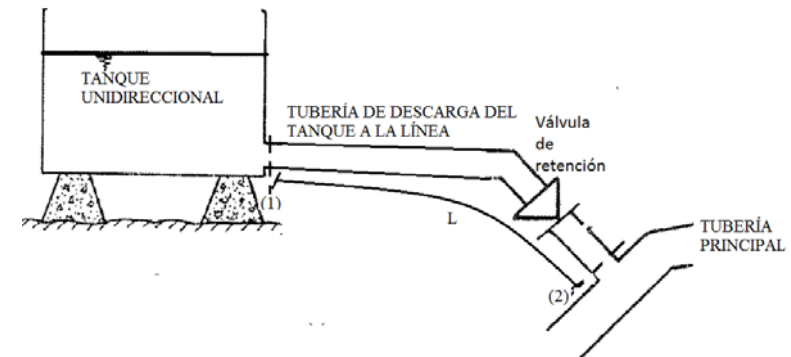
$$h(t) = h_0 - \alpha t, \quad \text{con } \alpha > 0$$

- Imponiendo las condiciones de borde y estas hipótesis:

$$-\alpha t = -\frac{L}{Ag} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

- Integrando:

$$Q = \frac{Ag}{L} \cdot \frac{\alpha t^2}{2}$$



Modelo de columna rígida no estacionario

Aplicaciones:

- ¿Cuál es el tiempo que tarda el tanque en suministrar un caudal Q_0 ?

$$t = \sqrt{\frac{2L}{\alpha Ag} \cdot Q_0}$$

$$Q_0 = 0,3 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 10 \text{ m/s}$$

$$L = 20 \text{ m}$$

$$A = 0,05 \text{ m}^2$$



$$t = 1,6 \text{ s}$$

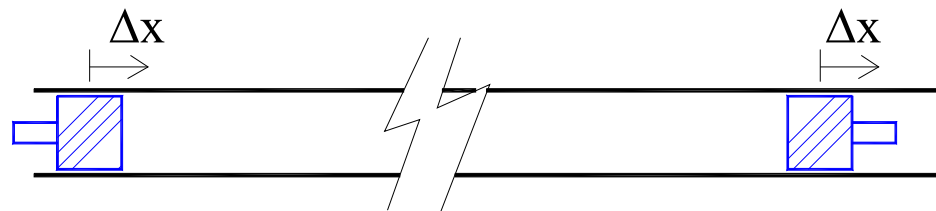
$$\Delta h = 16 \text{ m}$$

Modelo no estacionario de columna rígida

Hipótesis habituales:

- Fluido incompresible
- Tubería rígida

→ Perturbación en el flujo (no estacionario)

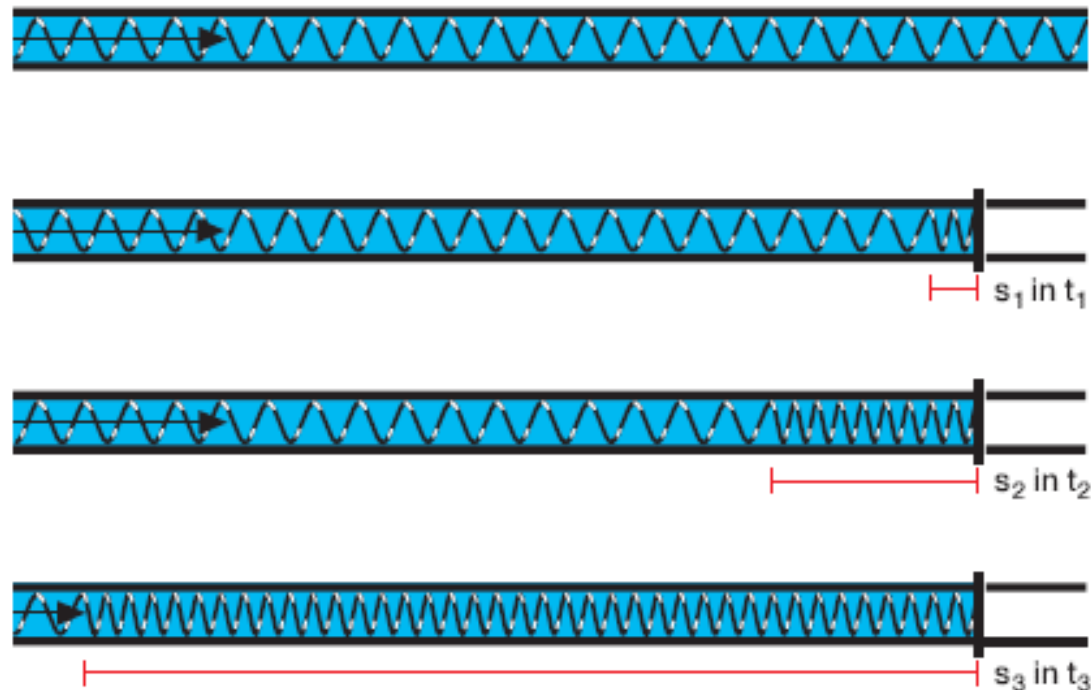


Transmisión ¿instantánea?

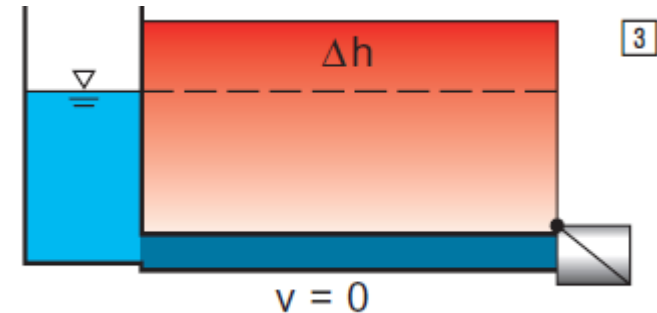
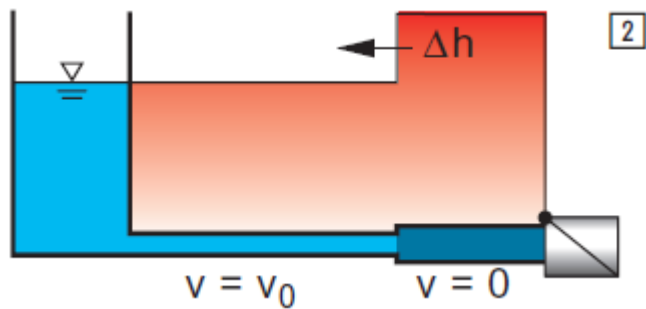
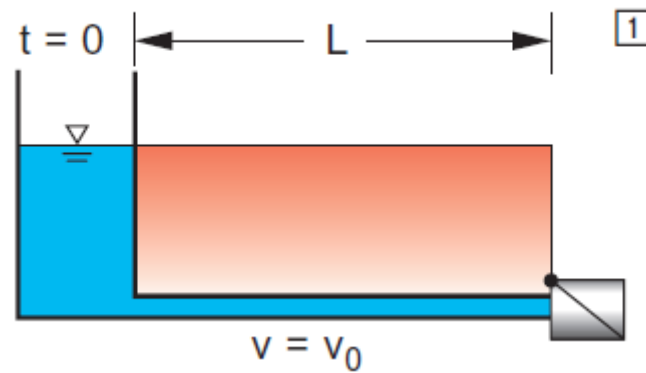
Modelo no estacionario de columna rígida

Hipótesis en flujo **NO** estacionario:

- Tubería elástica: $A(p)$
- Fluido compresible: $\rho(p)$



Modelo no estacionario de columna rígida



MODELO NO ESTACIONARIO EN TUBERÍA ELÁSTICA Y FLUIDO COMPRESIBLE

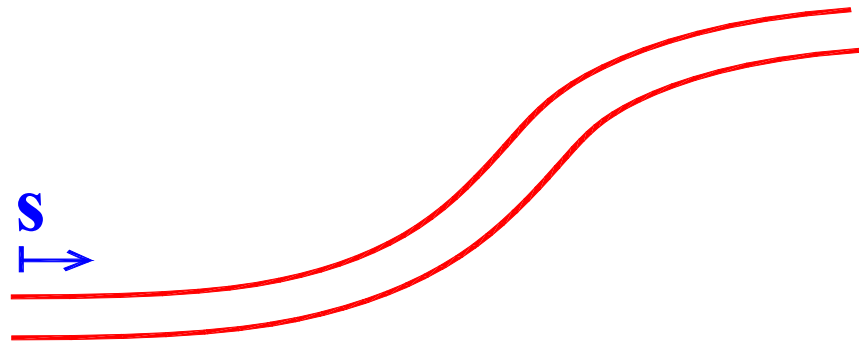
Transitorios Hidráulicos en Tuberías a Presión

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

□ Hipótesis:

- Flujo no estacionario
- Tubería elástica
- Fluido compresible

→ $\rho(p)$, $A(p)$, $p(s,t)$, $v(s,t)$



□ Otras hipótesis:

- Distribución de velocidades uniforme, igual a la velocidad media:

$$V(s, t) = \frac{Q}{A}$$

- Trayectorias rectilíneas, distribución hidrostática de presiones en la sección, carga piezométrica constante en la sección: $h(s, t) = \frac{p}{\gamma} + z$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

□ Incógnitas:

$$\rho(p) , A(p) , p(s,t), v(s,t)$$

□ Ecuaciones:

Conservación de la masa

Ecuación dinámica

Ecuación constitutiva de compresibilidad del fluido

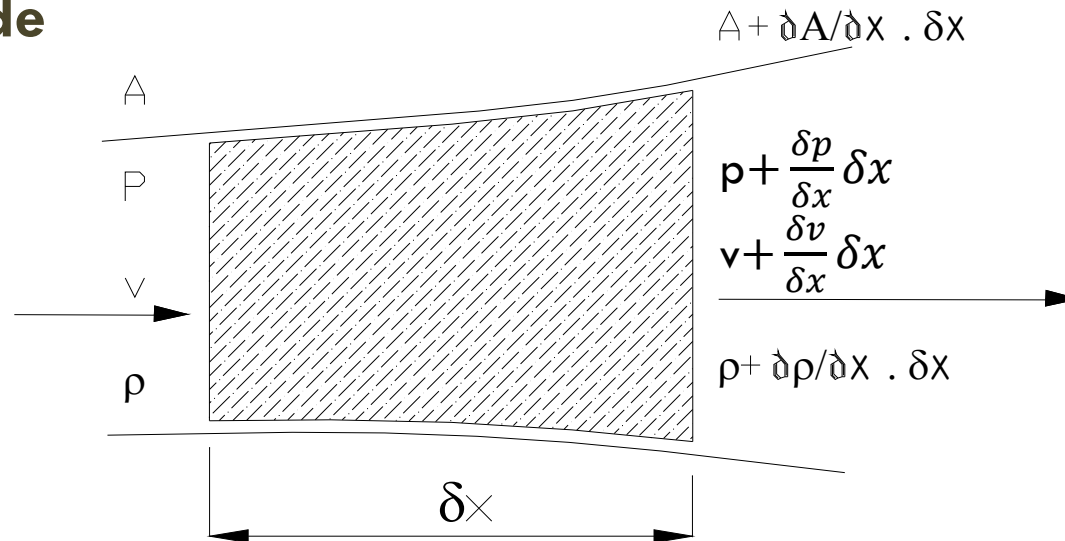
Ecuación constitutiva de elasticidad de la tubería

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Conservación de masa

$$\delta M = \int_{\delta V} \rho dV$$

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = 0$$



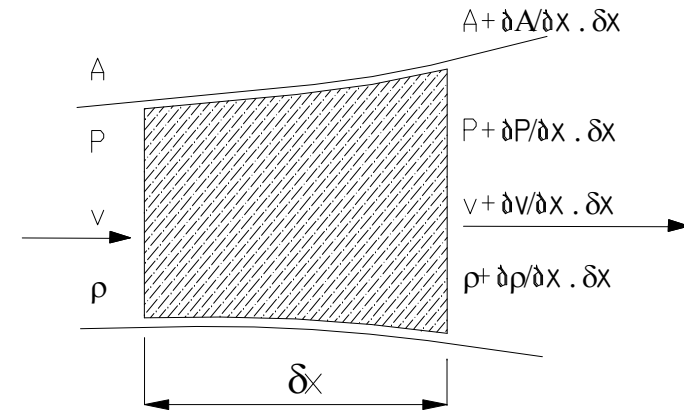
$$\frac{d}{dt} \int_{\delta V} \rho dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho dV}_{\text{Variación de la masa dentro del volumen de control}} + \underbrace{\int_{S_{V.C.}} \rho(\bar{v} \cdot \bar{n}) \cdot dA}_{\text{Masa saliente menos masa entrante}} = 0$$

Variación de la masa dentro del volumen de control

Masa saliente menos masa entrante

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Se desprecian términos en $(\delta x)^2$ y $(\delta x)^3$



1er término:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(2A + \frac{\partial A}{\partial x} \delta x \right) \frac{\delta x}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho A \delta x + \rho \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\delta x^2}{2} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot A \cdot \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \delta x$$

2do término:

$$\int_{S_{v.c.}} \rho \cdot (\bar{v} \cdot \bar{n}) \cdot dA = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \delta x \right) \left(A + \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \right) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta x \right) - \rho \cdot A \cdot v =$$

$$\rho \cdot A \cdot v + \rho \cdot A \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x \cdot v + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta x^2 + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \delta x \cdot A \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x^2 \cdot v + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta x^3 - \rho \cdot A \cdot v$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Se desprecian términos en $(\delta x)^2$ y $(\delta x)^3$

1er término:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot A \cdot \delta x + \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \delta x$$

2do término:

$$\int_{S_{v.c.}} \rho \cdot (\bar{v} \cdot \bar{n}) \cdot dA = A \cdot \rho \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \rho v \frac{\partial A}{\partial x} \delta x + A v \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x$$

Sustituyendo:

$$A \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \delta x + \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \rho \cdot \delta x + A \cdot \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \delta x + \rho \cdot v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \delta x + A \cdot v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \delta x = 0$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Dividendo entre $A \cdot \delta x$ (por unidad de masa) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{v}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

Reagrupando:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

Incógnitas: ρ, A, v

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Por las hipótesis de compresibilidad del fluido y elasticidad de la tubería, se tiene que:

$$\rho = \rho [p (x,t)] \rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

$$A = A [p (x,t)] \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dp} \cdot \frac{dp}{dt}$$

Sustituyendo y reagrupando:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\rho}{A} \cdot \frac{dA}{dp} \cdot \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dp}{dt} \left(\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \cdot \frac{dA}{dp} \right) + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Ecuación de conservación de la masa:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} \right) \left(\frac{dA}{A} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{\rho} \right) + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = 0$$

- Flujo no estacionario
- Fluido compresible
- Tubería elástica

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

❖ Ecuaciones constitutivas

Para el fluido:
$$\frac{d\rho}{d\rho} = \frac{\rho}{K}$$

	K (kg/m²)x10⁻⁸			
Presión (kgf/cm²)	0°C	20°C	49°C	93°C
1	2.080	2.243	2.334	2.172
100	2.109	2.320	2.545	2.242
1000	2.672	2.883	2.995	2.847

ρ_0 : densidad de referencia

K: módulo de compresibilidad volumétrica del fluido

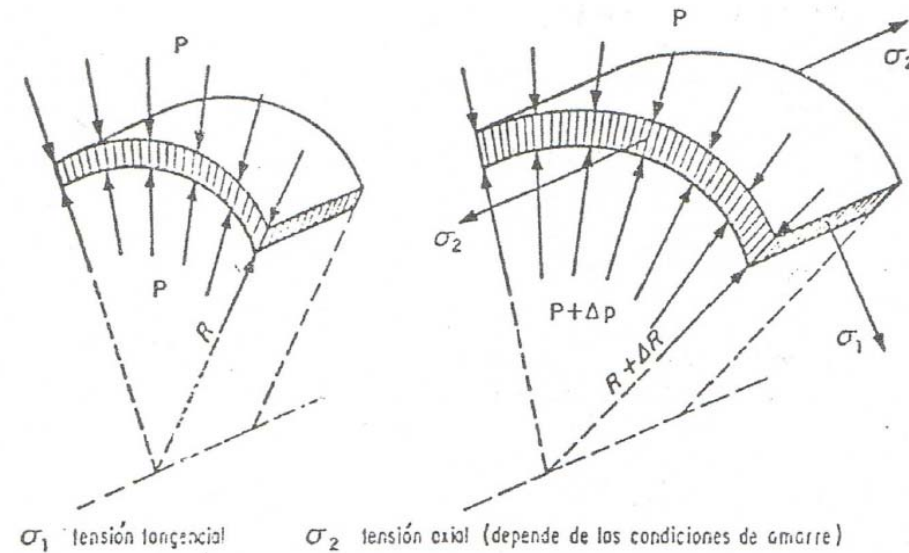
Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

❖ Ecuaciones constitutivas

Para la tubería:

$$\frac{dR}{dp} = C$$

$C = C(\text{espesor, Radio, } E \text{ (módulo elasticidad), } \nu \text{ (coeficiente de Poisson), tipo de amarre de la tubería})$



σ_1 tensión longitudinal

σ_2 tensión axial (depende de las condiciones de amarre)

a) Presión interior igual a la presión exterior

b) Presión interior mayor en Δp que la presión exterior

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Descripción de la conducción	Valor de C
1. Pared rígida	$C = 0$
2. Pared elástica, delgada y con frecuentes juntas de expansión	$C = \frac{R^2}{Ee}$
3. Pared elástica, delgada e impedida de moverse longitudinalmente	$C = \frac{R^2}{Ee}(1-\nu^2)$
4. Túnel sin revestimiento	$C = \frac{R}{2G} (*)$
5. Túnel revestido de acero	$C = \frac{R^2}{2RG+Ee} (*)$

* $G = E_r/2(1+\nu_r)$; E_r , ν_r son las constantes elásticas de la roca que rodea al túnel

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Conservación Masa:
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \left(\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dp} \right) + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Constitutiva fluido:
$$\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho}{K}$$

Constitutiva tubería:
$$\frac{dR}{dp} = C$$

Sustituyendo ecuaciones constitutivas en el segundo factor del primer sumando de la ecuación de conservación de la masa:

$$\left(\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dp} \right) = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{\pi R^2} 2 \cdot R \cdot \pi \frac{dR}{dp} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right)$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

❖ Hipótesis (fluido levemente compresible):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} \ll 1$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_0 + \Delta\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \approx 1 \Rightarrow \rho \approx \rho_0$$

❖ Sustituyendo:

$$\left(\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dp} \right) = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right) = \rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right)$$

❖ Definiendo CELERIDAD:

$$[a] = \text{m/s}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right)}}$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Sustituyendo:
$$\left(\frac{d\rho}{dp} + \frac{\rho}{A} \frac{dA}{dp} \right) = \rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right) = \frac{1}{a^2}$$

Ecuación de conservación de la masa:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{a^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| \gg \left| v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|$$

❖ **Hipótesis** (variaciones temporales rápidas):

Ecuación de conservación de la masa:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \cdot \frac{1}{a^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

❖ Hipótesis (tubería ligeramente elástica):

$$\frac{\Delta D}{D_0} \ll 1$$

$$A \approx A_0$$

$$Q(x, t) \approx v(x, t) \cdot A$$

Recordando además:

$$h(x, t) \approx z(x) + \frac{p(x, t)}{\gamma}$$

Sustituyendo en ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{g \cdot A}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

SISTEMA DE ECUACIONES QUE GOBIERNA EL FENÓMENO:

Conservación de masa

+ Ec. Constitutiva del fluido

+ Ec. Constitutiva de la tubería:



$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{g \cdot A}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Válida para: Tubería ligeramente elástica, fluido levemente compresible, variaciones temporales rápidas.

Ecuación Dinámica:

f se define por : $\tau(s, t) = f \cdot \rho \frac{v^2}{8}$



$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{Q|Q|}{2D \cdot A} = 0$$

(tensión rasante para flujo estacionario)

INCÓGNITAS: $Q(x, t)$, $h(x, t)$

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.

Para resolverlo se deben conocer además:

- **Condiciones Iniciales:** $Q = Q(s, 0)$
 $h = h(s, 0)$
- **Condiciones de Frontera:** Caudal o carga piezométrica o una relación entre ambos, en los extremos de la tubería y para todo t .

Modelo no estacionario de tubería elástica y fluido compresible

Características del sistema de ecuaciones:

- Sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.
- Variables independientes: distancia x y el tiempo t .
- Variables dependientes: carga piezométrica h y el caudal Q .
- Parámetros del sistema: a , ρ , f y D . Se asumen constantes con el tiempo, pero suelen variar por tramos a lo largo de la tubería.
- La celeridad a depende, fundamentalmente, de la elasticidad de la tubería y de la compresibilidad del fluido.
- El coeficiente de fricción f generalmente varía con el número de Reynolds, sin embargo se asume constante de forma de simplificar la solución al sistema.

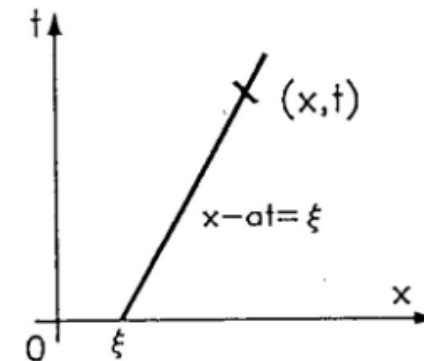
Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

Sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{g.A}{a^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{Q|Q|}{2D.A} = 0 \end{array} \right.$$

- Cambio de variable: $\eta = x + a.t$; $\varepsilon = x - a.t$

$\Rightarrow Q(\eta, \varepsilon), h(\eta, \varepsilon)$



Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

$$\eta = x + a.t; \quad \varepsilon = x - a.t$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a \frac{\partial Q}{\partial \eta} - a \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}$$

Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

- Sustituyendo en las ecuaciones:
$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) = 0$$

- Sumando ambas ecuaciones:
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(Q + \frac{gA}{a} h \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(Q - \frac{gA}{a} h \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$
- Restando ambas ecuaciones:

\Rightarrow Nuevo sistema de ecuaciones.

Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

- Solución al nuevo sistema de ecuaciones:

$$Q + \frac{gA}{a} h = 2[F(\varepsilon) + C_1]$$

$$Q - \frac{gA}{a} h = 2[G(\eta) + C_1']$$

Sistema lineal algebraico

Incógnitas: $Q(\eta, \varepsilon)$, $h(\eta, \varepsilon)$.

F y G son funciones arbitrarias, y C_1 y C_1' son constantes arbitrarias, que quedan determinadas por las condiciones iniciales y de frontera.

Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

- Despejando Q y h se obtiene: $Q = F(\varepsilon) + G(\eta) + A_1$

$$h = \frac{a}{gA} [F(\varepsilon) - G(\eta)] + A_2$$

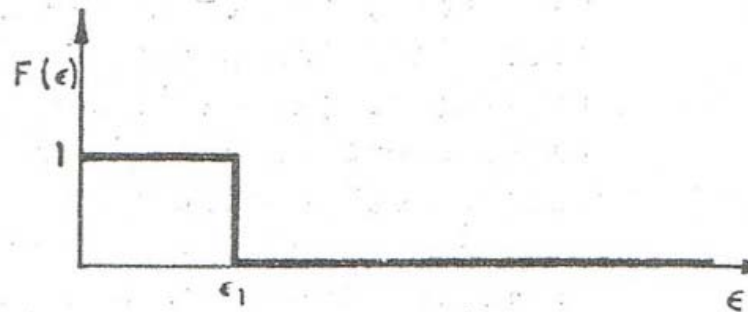
- Deshaciendo el cambio de variable: $\eta = x + a.t$; $\varepsilon = x - a.t$
- $Q - Q_0 = F(x - at) + G(x + at)$
- $h - h_0 = \frac{a}{gA} [F(x - at) - G(x + at)]$

Donde: $A_1 = C_1 + C'_1 = Q_0$ y $A_2 = (C_1 - C'_1)a/gA = h_0$

F , G , Q_0 y h_0 se obtienen de las condiciones iniciales y de frontera para cada caso.

Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

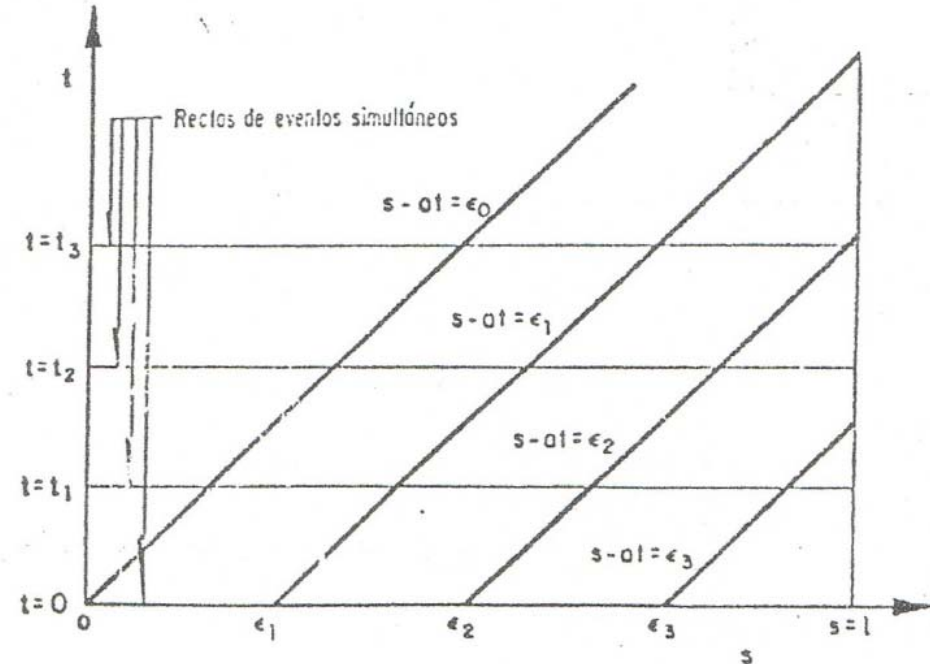
Interpretación de la solución



$$\epsilon = s - at$$

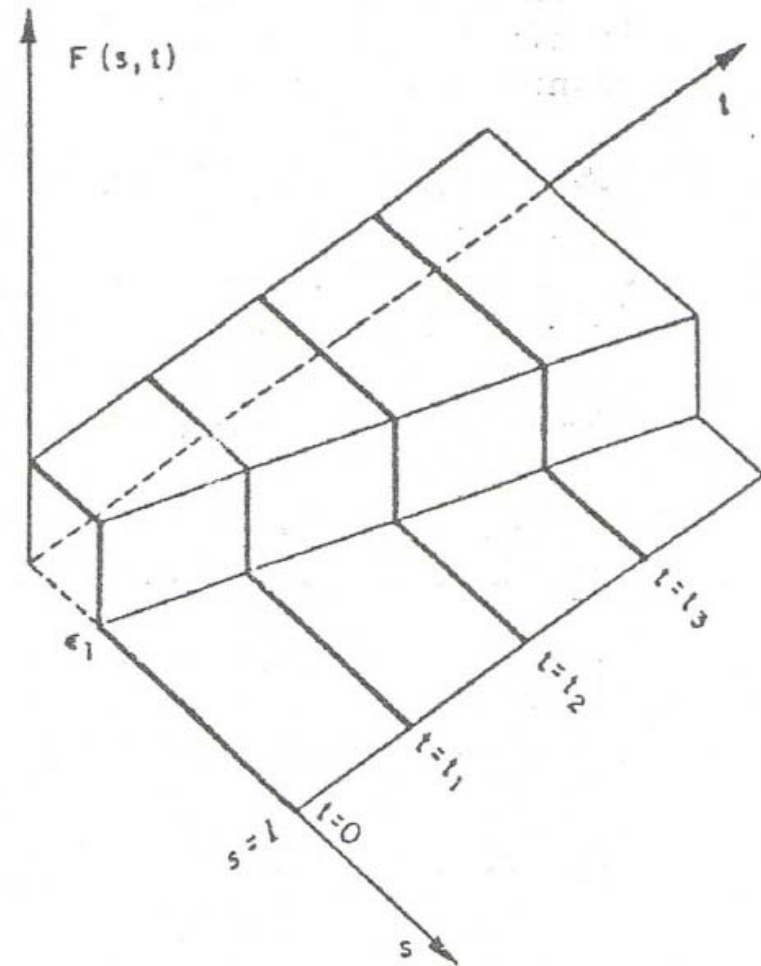
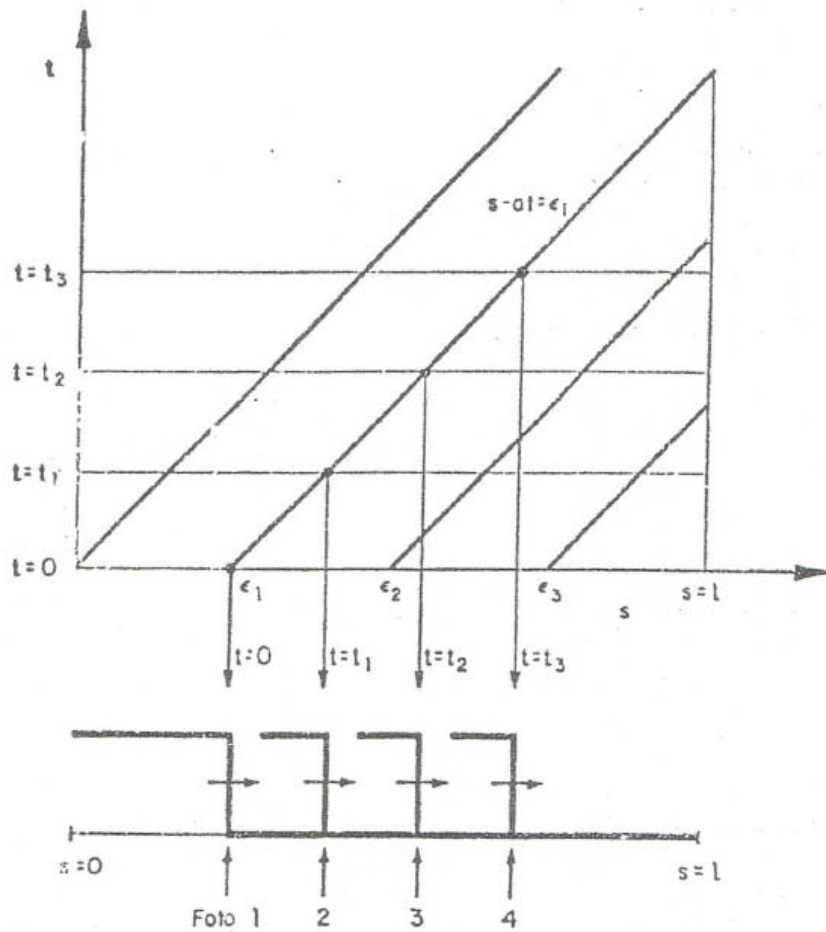
$$F(\epsilon) = 1 \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_1$$

$$F(\epsilon) = 0 \quad \epsilon_1 < \epsilon$$



Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

Interpretación de la solución



Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

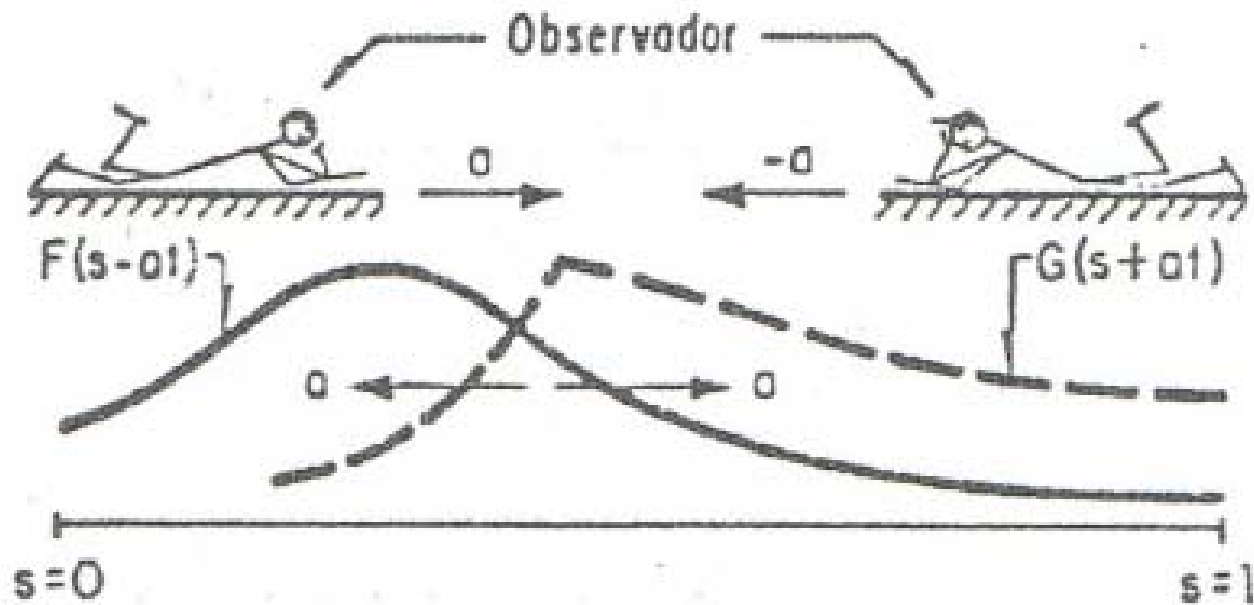


Interpretación de la solución

- $F(s-at)$: desplaza la función F en t en el sentido de las s crecientes.
- $G(s+at)$: desplaza la función G en t en el sentido de las s decrecientes.

Sistema lineal: caso SIN FRICCIÓN ($f=0$)

- ❑ Movimiento de las ondas F y G en la tubería:



Velocidad de la onda: Celeridad



Interpretación física de a

a : «Celeridad»

es la velocidad de propagación de la perturbación

- Es una onda de sobrepresión cuando hay compresión del líquido.
- Es una onda de depresión cuando el líquidos se descomprime.

Velocidad de la onda: Celeridad

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R} \right)}}$$

Para agua fría : $K = 2,04 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

Descripción de la conducción	Valor de C
1. Pared rígida	$C = 0$
2. Pared elástica, delgada y con frecuentes juntas de expansión	$C = \frac{R^2}{Ee}$
3. Pared elástica, delgada e impedida de moverse longitudinalmente	$C = \frac{R^2}{Ee}(1-\nu^2)$

Tubería de pared delgada con frecuentes juntas de expansión:

$$a = \sqrt{\frac{K/\rho_0}{1 + \frac{K}{E} \cdot \frac{D}{e}}}$$

Velocidad de la onda: Celeridad

Tubería rígida: $a = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = 1430 \text{ m/s}$

Tubería de pared delgada con frecuentes juntas de expansión:

Para agua fría : $K = 2,04 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
 $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



$$a = \sqrt{\frac{K / \rho_0}{1 + \frac{K}{E} \cdot \frac{D}{e}}}$$

$$a = \frac{1430 \text{ m/s}}{\sqrt{1 + \frac{2,04 \text{ GPa}}{E} \cdot \frac{D}{e}}}$$

<u>Material</u>	<u>E (GPa)</u>
Aceros	200 – 210
Fundición grís	95 – 140
Fundición nodular	170
Hormigón	14 – 30
Hormigón armado, encamisado	39
PVC	2,4 - 3

Velocidad de la onda: Celeridad

Otros valores de C

Descripción de la conducción	Valor de C
1. Pared rígida	$C = 0$
2. Pared elástica, delgada y con frecuentes juntas de expansión	$C = \frac{R^2}{Ee}$
3. Pared elástica, delgada e impedida de moverse longitudinalmente	$C = \frac{R^2}{Ee}(1-\nu^2)$
4. Túnel sin revestimiento	$C = \frac{R}{2G} (*)$
5. Túnel revestido de acero	$C = \frac{R^2}{2RG+Ee} (*)$

* $G = E_r/2(1+\nu_r)$; E_r , ν_r son las constantes elásticas de la roca que rodea al túnel

Velocidad de la onda: Celeridad

Influencia del contenido de aire en la celeridad

Teoría:

Fluido: líquido con burbujas de gas uniformemente

distribuidas, entonces:

V: volumen

$$V_{Total} = V_{líquido} + V_{gas}$$

Un Δp tiene asociado un ΔV_{total} , tal que:

$$\Delta V_{Total} = \Delta V_{líquido} + \Delta V_{gas}$$

El módulo de compresibilidad para el líquido, el gas y la mezcla líquido - gas es por su definición, respectivamente:

$$K_{líquido} = \frac{\Delta p}{\Delta V_{líquido} / V_{líquido}}$$

$$K_{gas} = \frac{\Delta p}{\Delta V_{gas} / V_{gas}}$$

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V_{total} / V_{total}}$$

Velocidad de la onda: Celeridad

Influencia del contenido de aire en la celeridad

Combinando las ecuaciones anteriores:

$$K = \frac{K_{\text{líquido}}}{1 + \left(V_{\text{gas}} / V_{\text{total}} \right) \left(K_{\text{líquido}} / K_{\text{gas}} - 1 \right)}$$

Si se asumen tubería rígida:

$$a = \sqrt{K / \rho}$$

La densidad de la mezcla líquido – gas se puede estimar como:

$$\rho = \frac{\rho_{\text{gas}} V_{\text{gas}} + \rho_{\text{líquido}} V_{\text{líquido}}}{V_{\text{total}}}$$

De las ecuaciones anteriores es posible obtener la celeridad para la mezcla líquido – aire.

Velocidad de la onda: Celeridad

Influencia del contenido de aire en la celeridad

Experiencia Vs teoría

