Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 1

Procesos estocásticos

Caracterización, estacionariedad, filtrado lineal de procesos.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1 (10.5)

Sea X_t definido en $t > 0$, un proceso de media nula y función de autocorrelación $R_X(t_1, t_2) = \text{mín}(t_1, t_2)$. Si X_t tiene distribución Gaussiana para cada t, hallar la densidad de probabilidad de X_t.

★ Ejercicio 2

Hallar la función de autocorrelación del proceso $X_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n, \quad n = 1, 2, ...,$ donde el conjunto de V.A. $\{Z_i\}$ son no correlacionadas, de media nula y varianza $\sigma^2 = var(Z_i)$ para todo i.

★ Ejercicio 3

Sea el proceso $Y_t = X_t \cos(2\pi f t + \Theta)$, donde X_t es un proceso estacionario en sentido amplio (WSS por sus siglas en inglés) de media nula y con autocorrelación $R_X(\tau)$.

(a) Si $\Theta = 0$. Hallar $\text{E}[Y_t]$, $R_Y(t, s)$ y $\text{E}[{Y_t}^2]$. ¿Es Y_t un proceso WSS?

(b) Ídem si Θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$ independiente del proceso X_t.

★ Ejercicio 4

Sea una secuencia binaria aleatoria cuyos elementos llamaremos «0» y «1». Los dígitos tienen una duración T, son equiprobables e independientes de los dígitos anteriores. El tiempo de comienzo de la secuencia, u origen de tiempos, es aleatorio y uniformemente distribuido en $[0, T]$. Si se codifica en código bipolar sin retorno a 0, es decir «0» $\Rightarrow -A$, «1» $\Rightarrow A$ (A es un nivel de tensión), hallar la autocorrelación de la secuencia y su densidad espectral de potencia.

★ Ejercicio 5

Considerar que en el problema 3, X_t es una onda binaria aleatoria, y se cumple que $f_0 \gg 1/T$. Hallar $R_Y(\tau)$, $S_Y(f)$ y la potencia media de la señal. Graficarlas.

⋆ Ejercicio 6

Sea X_t un proceso estacionario y $Z_t = X_t + X_{t-T_d}$, con T_d constante.

(a) Demostrar que Z_t es WSS

(b) Hallar $R_Z(\tau)$ y $S_Z(f)$, conocidos $R_X(\tau)$ y $S_X(f)$.

✦ Ejercicio 7 (10.26)

Sean X_t un proceso WSS de media nula y autocorrelación $(1-|\tau|)I_{[-1,1]}(\tau)$ y un filtro con función de transferencia $H(f)$ diseñado para que la salida del sistema Y_t tenga la función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = \frac{sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$$

cuando X_t es la entrada. Encontrar una fórmula para el filtro requerido $H(f)$.

⋆ Ejercicio 8

Sea X_n un proceso discreto de media $m_X(n)$ y autocorrelación $R_X(n,m)$. Sea Y_n la salida de un filtro estable LTI de respuesta al impulso $h(n)$ y entrada X_n

$$Y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)X_i$$

Demostrar que:

(a) $m_Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)m_X(n-k)$

(b) $\mathrm{E}[X_n Y_m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_X(n, m-k)$

(c) $\mathrm{E}[Y_n Y_m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_X(n-l, m-k)\right)$

Considerar ahora X_n WSS y $h(n)$ real.

(d) Obtener las expresiones anteriores en este caso.

(e) Considerar $R_{XY} = \mathrm{E}[X_{n+m}Y_m]$, $R_Y = \mathrm{E}[Y_{n+m}Y_m]$ y demostrar que

$$S_{XY} = H(e^{j\theta})^* S_X(e^{j\theta}) \quad \text{y} \quad S_Y = |H(e^{j\theta})|^2 S_X(e^{j\theta})$$

Nota: En tiempo discreto se utiliza la transformada de Fourier discreta para $S(e^{j\theta})$ y $H(e^{j\theta})$.

⋆ Ejercicio 9

Sea X_n un proceso real discreto, WSS, de media nula, y autocorrelación

$$R_X(n) = \sigma_X^2 \delta(n)$$

Sea Y_n la salida cuando X_n es la entrada a un sistema LTI estable, de respuesta al impulso $h(n)$. Mostrar que:

1. $\mathrm{E}[X_n Y_n] = h(0)\sigma_X^2$
2. $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n)$

Solución

Ejercicio 1

Por definición $\mathrm{E}[X_t] = 0$ y como $var[X_t] = \mathrm{E}[X_t X_t] = R_X(t,t) = \text{mín}(t,t) = t$ tenemos que $X_t \sim N(0,t)$

Ejercicio 2

Para $m > n$

$$\mathrm{E}[X_n X_m] = \mathrm{E}\left[X_n\left(X_n + \sum_{i=n+1}^{m} Z_i\right)\right] = \mathrm{E}[X_n^2] + \mathrm{E}\left[X_n\left(\sum_{i=n+1}^{m} Z_i\right)\right]$$

Como $\mathrm{E}[Z_i Z_j] = 0$ para $i \neq j$ y $\mathrm{E}[Z_i] = 0$, para el primer término de la ec. anterior tenemos

$$\mathrm{E}[X_n^2] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{n} var(Z_i) = n\sigma^2$$

y para el segundo

$$\mathrm{E}\left[X_n\left(\sum_{i=n+1}^{m} Z_i\right)\right] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right)\left(\sum_{i=n+1}^{m} Z_i\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{m} \mathrm{E}[Z_i Z_j] = 0$$

El caso $m < n$ es análogo al caso anterior ya que $\mathrm{E}[X_n X_m] = \mathrm{E}[X_m X_n]$. Por lo que

$$R_x(n,m) = \mathrm{E}[X_n, X_m] = \text{mín}(n,m)\sigma^2$$

Ejercicio 3

(a) Para ver si es estacionario en sentido amplio debemos ver si la media y la autocorrelación dependen del instante observado. Para la media tenemos

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[X_t \cos(\omega_0 t + \Theta)]$$

y como $\Theta = 0$, $\cos(\omega_0 t + \Theta)$ toma un valor constante y por lo tanto

$$\mathrm{E}[Y_t] = \cos(\omega_0 t + \Theta)\,\mathrm{E}[X_t]$$

como $\mathrm{E}[X_t] = 0$, tenemos que

$$\mathrm{E}[Y_t] = 0$$

En cuanto a la autocorrelación

$$R_Y(t, t+\tau) = \mathrm{E}[Y_t Y_{t+\tau}] = \mathrm{E}[X_t \cos(\omega_0 t + \Theta) X_{t+\tau} \cos(\omega_0 (t+\tau) + \Theta)]$$

,de la misma manera que antes, los cosenos toman valores constantes, entonces

$$R_Y(t, t+\tau) = \mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}] \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0 (t+\tau))$$

y utilizando la siguiente igualdad trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A+B) + \cos(A-B)}{2}$$

tenemos que

$$R_Y(t, t+\tau) = R_X(\tau) \left(\frac{\cos(\omega_0 \tau) + \cos(\omega_0(2t+\tau))}{2} \right)$$

Por lo que la autocorrelación es dependiente de t. Por lo tanto el proceso no es estacionario en sentido amplio y entonces no es estacionario.

(b) Al ser Θ una variable aleatoria, ahora $\cos(\omega_0 t + \Theta)$ es un proceso. Entonces, planteando el valor medio y la independencia entre los procesos tenemos

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[X_t \cos(\omega_0 t + \Theta)] = \mathrm{E}[X_t]\, \mathrm{E}[\cos(\omega_0 t + \Theta)] = 0$$

Planteando la autocorrelación y utilizando que X_t es estacionario tenemos

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= \mathrm{E}[Y_t Y_{t+\tau}] = \mathrm{E}[X_t X_{t+\tau}]\, \mathrm{E}[\cos(\omega_0 t + \Theta) \cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta)] \\
&= R_X(\tau) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(\omega_0 t + \Theta) \cos(\omega_0(t+\tau) + \Theta) d\Theta \\
&= R_X(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega_0 \tau) + \cos(\omega_0(2t+\tau) + 2\Theta)}{2} d\Theta \\
&= R_X(\tau) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{2} d\Theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\omega_0(2t+\tau) + 2\Theta)}{2} d\Theta \right)
\end{aligned}$$

La primera integral, es la integral de una constante y la segunda es la integral de un coseno en una cantidad entera de ciclos, entonces:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) \frac{\cos(\omega_0 \tau)}{2}$$

y el proceso es estacionario en sentido amplio.

Ejercicio 4

El proceso estocástico que resulta de codificar la secuencia binaria aleatoria puede escribirse como,

$$Y_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A X_n p(t - nT + \epsilon).$$

Donde X_n es la secuencia binaria aleatoria, ϵ es el retardo aleatorio de distribución uniforme en el intervalo $[0, T]$ (que representa la dessincrinización entre emisor y receptror) y $p(t)$ es el pulso con que se codifica. En el caso de este problema $p(t)$ es un pulso rectangular que vale uno de en el intervalo $[0, T]$ y cero en el resto.
Intentaremos probar que el proceso T_t es estacionario en sentido amplio. Para ello es necesario demostrar que tiene media constante y que su autocorrelación depende únicamente de la diferencia entre los instantes de tiempo comparados.

A partir de la linealidad del operador esperanza y dado que X_n es independiente de ϵ para todo valor de n, la esperanza de Y_t puede hallarse como

$$\mathrm{E}[Y_t] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\,\mathrm{E}[X_n]\,\mathrm{E}[p(t - nT + \epsilon)].$$

Como X_n es un proceso iid. con $E[X_n] = 0$ para todo n entero, y por lo tanto se deduce que para todo instante $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{E}[Y_t] = 0.$$

Con esto se tiene que Y_t es un proceso de media constante. La autocorrelación está dada por,

$$R_Y(t,s) = E[Y_t Y_s].$$

El cálculo de la autocorrelación del proceso Y_t se realizará en dos pasos. Primero se estudiará $R_Y(t,s)$ cuando $|t-s| > T$. Luego se estudiara el caso complementario.

Caso $|t-s| > T$

La autocorrelación del proceso Y_t está dada por,

$$R_Y(t,s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A^2\,\mathrm{E}[X_n X_m]\,\mathrm{E}[p(t - nT + \epsilon)p(s - mT + \epsilon)].$$

En la ecuación anterior aparece la auto correlación de la secuencia X_n,

$$E[X_n X_m] = R_X(n-m) = \delta(n-m)$$

que depende sólo de $n-m$ ya que X_n es estacionaria por ser iid. Por lo tanto en la suma anterior el término que depende de X_n sólo será distinto de cero (y valdrá $\sigma_X^2 = 1$) cuando n y m sean iguales. Por lo tanto la autocorrelación puede escribirse como

$$R_Y(t,s) = A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[p(t - nT + \epsilon)p(s - nT + \epsilon)].$$

La función $\phi(t,s) = p(t - nT + \epsilon)p(s - nT + \epsilon)$ vale cero para cualquier combinación de t, s y n, ya que la separación entre t y s es mayor que la duración de los pulsos. Por lo tanto,

$$R_Y(t,s) = 0 \qquad \text{si } |t-s| > T$$

Caso $|t-s| \leq T$

En este caso los instantes t y s pueden o no pertenecer a un mismo pulso. Llamemos Γ al suceso "t y s no son instantes de un mismo pulso (o tiempo de bit)", la esperanza que define a la autocorrelación puede calcularse como

$$R_Y(t,s) = E[Y_tY_s|\Gamma]P(\Gamma) + E[Y_tY_s|\Gamma^c](1-P(\Gamma)).$$

La primera esperanza de la ecuación anterior puede calcularse de manera análoga a lo que se hizo para el caso $|t-s|>T$, ya que está condicionada a que suceda Γ. Teniendo en cuenta de que Γ sólo depende del valor que tome ϵ y operando como se hizo antes, la segunda esperanza puede expresarse como

$$E[Y_tY_s|\Gamma^c] = A^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[p(t-nT+\epsilon)p(s-nT+\epsilon)|\Gamma^c].$$

La condiciónalidad a Γ^c implica que el ϵ es tal que t y s “caen” en un mismo pulso. Por otro lado, dados t y s habrá un único valor de n_0 para el cual $\phi(t,s)$ sea distinto de cero (el pulso al que pertenecen dichos instantes). Es decir,

$$E[Y_tY_s|\Gamma^c] = A^2\, \mathrm{E}[p(t-n_0T+\epsilon)p(s-n_0T+\epsilon)|\Gamma^c] = A^2.$$

Donde la última igualdad se deduce de que $p(t-n_0T+\epsilon)p(s-n_0T+\epsilon)=1$, es decir es independiente de ϵ. Finalmente queda calcular la probabilidad dé que se de el suceso Γ, es decir que t corresponda a un pulso distinto que s, o dicho de otro modo que haya una transición de pulso entre ellos. Matematicamente hay que calcular la probabilidad de que se cumpla

$$s < n_0T + \epsilon < t$$

asumiendo $t<s$ y siendo n_0 el único entero para el cual $|t-n_0T|$ y $|s-n_0T|$ son menores que T. La condición anterior puede escribirse de la forma,

$$s - n_0T < \epsilon < t - n_0T.$$

Como ϵ tiene distribución $U[0,T]$, la probabilidad puede calcularse como,

$$P(s-n_0T<\epsilon<t-n_0T) = \int_{s-n_0T}^{t-n_0T} \frac{1}{T}d\epsilon = \frac{t-s}{T}.$$

El caso en que $s \geq t$ se calcula en forma análoga, con lo cual

$$P(\Gamma) = \frac{|t-s|}{T}.$$

Finalmente, sustituyendo las expresiones halladas en los dos casos estudiados, la autocorrelación de Y_t) queda dada por,

$$R_Y(t,s) = E[Y_tY_s] = A^2\left(1 - \frac{|t-s|}{T}\right).$$

Puede verse entonces que la autocorrelación depende únicamente de la diferencia entre los instantes comparados. Por lo tanto el proceso es estacionario en sentido amplio y su autocorrelación puede escribirse de la forma,

$$R_Y(\tau) = A^2\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

Ejercicio 5

Como vimos en el problema 3,

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau)\frac{\cos(\omega_0\tau)}{2}$$

En este caso tenemos, $R_X(\tau) = A^2\Lambda(\frac{\tau}{T})$. Por lo tanto la ecuación anterior puede expresarse como

$$R_Y(\tau) = A^2\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\frac{\cos(\omega_0\tau)}{2}$$

La densidad espectral de potencia $S_Y(f)$ es la transformada de fourier de la autocorrelación, es decir:

$$S_Y(f) = A^2 T\mathrm{sinc}^2(fT) * \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{4}$$

Finalmente:

$$S_Y(f) = \frac{A^2T}{4}\Big[\mathrm{sinc}^2\big((f-f_0)T\big) + \mathrm{sinc}^2\big((f+f_0)T\big)\Big]$$

La potencia de la señal la podemos obtener evaluando la autocorrelación en 0:

$$R_Y(0) = A^2\Lambda\left(\frac{0}{T}\right)\frac{\cos(0)}{2} = \frac{A^2}{2}$$

Ejercicio 6

(a) Al plantear la esperanza tenemos

$$\mathrm{E}[Z_t] = \mathrm{E}[X_t + X_{t-T_d}] = \mathrm{E}[X_t] + \mathrm{E}[X_{t-T_d}]$$

la cual no depende de t ya que $\mathrm{E}[X_t]$ no depende de t. Para la autocorrelación tenemos

$$\begin{aligned}
R_Z(t,s) &= \mathrm{E}[Z_tZ_s] = \mathrm{E}[(X_t + X_{t-T_d})(X_s + X_{s-T_d})] \\
&= \mathrm{E}[X_tX_s] + \mathrm{E}[X_tX_{s-T_d}] + \mathrm{E}[X_{t-T_d}X_s] + \mathrm{E}[X_{t-T_d}X_{s-T_d}] \\
&= 2R_X(t-s) + R_X(t-s+T_d) + R_X(t-s-T_d)
\end{aligned}$$

la cual depende de t y s a través de su difirencia. Por lo que Z_t es WSS.

(b)

$$R_Z(\tau) = 2R_X(\tau) + R_X(\tau+T_d) + R_X(\tau-T_d)$$

y

$$S_Z(f) = S_X(f)\left(2 + e^{-j2\pi fT_d} + e^{j2\pi fT_d}\right) = 2S_X(f)(1+\cos(2\pi fT_d))$$

Ejercicio 7

Transformando $R_X(\tau)$ tenemos que $S_X(f) = [\sin(\pi f)/(\pi f)]^2$. El objetivo es elegir un filtro $H(f)$ tal que $R_Y(\tau) = \sin(\pi\tau)/(\pi\tau)$.
Sabemos que $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ y a su vez $S_Y(f) = I_{[-1/2,1/2]}(f)$ por lo que:

$$I_{[-1/2,1/2]}(f) = |H(f)|^2 \left[\frac{\sin(\pi f)}{(\pi f)}\right]^2$$

Y entonces:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{\pi f}{\sin(\pi f)} & si \quad |f| \geq 1/2 \\ \\ 0 & si \quad |f| < 1/2 \end{cases}$$

Ejercicio 8

Haciendo el cambio de variable $k = n - i$, podemos escribir

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) X_{n-k}$$

(a)

$$\begin{aligned} m_Y(n) = \mathrm{E}[Y_n] = \mathrm{E}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) X_{n-k}\right] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,\mathrm{E}[X_{n-k}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) m_X(n-k) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_n Y_m] = \mathrm{E}\left[X_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) X_{m-k}\right] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,\mathrm{E}[X_n X_{m-k}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n, m-k) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[Y_n Y_m] = \mathrm{E}\left[\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) X_{n-l}\right) Y_m\right] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\,\mathrm{E}[X_{n-l} Y_m] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n-l, m-k) \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
m_Y(n) &= m_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \\
\mathrm{E}[X_n Y_m] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n-m+k) \\
\mathrm{E}[Y_n Y_m] &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n-m-(l-k))
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{aligned}
S_{XY} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{XY}(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n+k) \right] e^{-j\theta n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n+k) e^{-j\theta n} \right] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta(m-k)} \right] \\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\theta k} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta m} \right] \\
&= \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\theta k} \right]^* \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta m} \right], \quad \text{(dado que } h \text{ es real)} \\
&= H(e^{j\theta})^* S_X(e^{j\theta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_Y &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_Y(n) e^{-j\theta n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(n-(l-k)) \right] e^{-j\theta n} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n-(l-k)) e^{-j\theta n} \right] \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \left[\sum_{m-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta(m+(l-k))} \right] \\
&= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) e^{-j\theta l} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{j\theta k} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta m} \right] \\
&= \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) e^{-j\theta l} \right] \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\theta k} \right]^* \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X(m) e^{-j\theta m} \right] \\
&= H(e^{j\theta}) H(e^{j\theta})^* S_X(e^{j\theta}) = |H(e^{j\theta})|^2 S_X(e^{j\theta})
\end{aligned}
$$

Ejercicio 9

Utilizando los resultados del ejercicio anterior tenemos que

$$\mathrm{E}[X_n Y_n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(k) = h(0)\sigma_X^2$$

y

$$\sigma_Y^2 = \mathrm{E}[Y_n^2] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) R_X(k-l) = \sigma_X^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k)$$