Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 1

Procesos estocásticos

Caracterización, estacionariedad, filtrado lineal de procesos.

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número, como 10.1 que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,* John A. Gubner.

✦ Ejercicio 1 (10.5)

Sea X_t definido en $t > 0$, un proceso de media nula y función de autocorrelación $R_X(t_1, t_2) = \text{mín}(t_1, t_2)$. Si X_t tiene distribución Gaussiana para cada t, hallar la densidad de probabilidad de X_t.

★ Ejercicio 2

Hallar la función de autocorrelación del proceso $X_n = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n, \quad n = 1, 2, ...$, donde el conjunto de V.A. $\{Z_i\}$ son no correlacionadas, de media nula y varianza $\sigma^2 = var(Z_i)$ para todo i.

★ Ejercicio 3

Sea el proceso $Y_t = X_t \cos(2\pi f t + \Theta)$, donde X_t es un proceso estacionario en sentido amplio (WSS por sus siglas en inglés) de media nula y con autocorrelación $R_X(\tau)$.

(a) Si $\Theta = 0$. Hallar $\mathrm{E}[Y_t]$, $R_Y(t, s)$ y $\mathrm{E}[{Y_t}^2]$. ¿Es Y_t un proceso WSS?

(b) Ídem si Θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[-\pi, \pi]$ independiente del proceso X_t.

★ Ejercicio 4

Sea una secuencia binaria aleatoria cuyos elementos llamaremos «0» y «1». Los dígitos tienen una duración T, son equiprobables e independientes de los dígitos anteriores. El tiempo de comienzo de la secuencia, u origen de tiempos, es aleatorio y uniformemente distribuido en $[0, T]$. Si se codifica en código bipolar sin retorno a 0, es decir «0» $\Rightarrow -A$, «1» $\Rightarrow A$ (A es un nivel de tensión), hallar la autocorrelación de la secuencia y su densidad espectral de potencia.

★ Ejercicio 5

Considerar que en el problema 3, X_t es una onda binaria aleatoria, y se cumple que $f_0 \gg 1/T$. Hallar $R_Y(\tau)$, $S_Y(f)$ y la potencia media de la señal. Graficarlas.

⋆ Ejercicio 6

Sea X_t un proceso estacionario y $Z_t = X_t + X_{t-T_d}$, con T_d constante.

(a) Demostrar que Z_t es WSS

(b) Hallar $R_Z(\tau)$ y $S_Z(f)$, conocidos $R_X(\tau)$ y $S_X(f)$.

✦ Ejercicio 7 (10.26)

Sean X_t un proceso WSS de media nula y autocorrelación $(1-|\tau|)I_{[-1,1]}(\tau)$ y un filtro con función de transferencia $H(f)$ diseñado para que la salida del sistema Y_t tenga la función de autocorrelación

$$R_Y(\tau) = \frac{sin(\pi\tau)}{\pi\tau}$$

cuando X_t es la entrada. Encontrar una fórmula para el filtro requerido $H(f)$.

⋆ Ejercicio 8

Sea X_n un proceso discreto de media $m_X(n)$ y autocorrelación $R_X(n,m)$. Sea Y_n la salida de un filtro estable LTI de respuesta al impulso $h(n)$ y entrada X_n

$$Y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(n-i)X_i$$

Demostrar que:

(a) $m_Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)m_X(n-k)$

(b) $\mathrm{E}[X_nY_m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_X(n,m-k)$

(c) $\mathrm{E}[Y_nY_m] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_X(n-l,m-k)\right)$

Considerar ahora X_n WSS y $h(n)$ real.

(d) Obtener las expresiones anteriores en este caso.

(e) Considerar $R_{XY} = \mathrm{E}[X_{n+m}Y_m]$, $R_Y = \mathrm{E}[Y_{n+m}Y_m]$ y demostrar que

$$S_{XY} = H(e^{j\theta})^* S_X(e^{j\theta}) \quad \text{y} \quad S_Y = |H(e^{j\theta})|^2 S_X(e^{j\theta})$$

Nota: En tiempo discreto se utiliza la transformada de Fourier discreta para $S(e^{j\theta})$ y $H(e^{j\theta})$.

⋆ Ejercicio 9

Sea X_n un proceso real discreto, WSS, de media nula, y autocorrelación

$$R_X(n) = \sigma_X^2\delta(n)$$

Sea Y_n la salida cuando X_n es la entrada a un sistema LTI estable, de respuesta al impulso $h(n)$. Mostrar que:

1. $\mathrm{E}[X_nY_n] = h(0)\sigma_X^2$
2. $\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n)$