FASCICULO III

TRANSITORIOS HIDRAULICOS EN CONDUCCIONES DE AGUA A PRESION

INDICE

ANEXOS

1. INTRODUCCION

Los fenómenos no estacionarios o transitorios en las conducciones de agua a presión constituyen un aspecto que el proyectista y el operador de un acueducto no pueden dejar de conocer. La magnitud de las sobrepresiones que se generan pueden destruir la conducción y asimismo las depresiones pueden reducir la presión interior a la presión de vapor del agua a la temperatura ambiente (0.25 mca de presión absoluta a 20°C). Una reducción en la presión interior de este orden, puede producir el colapso de la tubería. Todo ello obliga a que el técnico adquiera un buen conocimiento de estos fenómenos. El carácter ondulatorio que presentan, tan diferente a los fenómenos estacionarios con los cuales el ingeniero hidráulico está habituado a tratar, le ha conferido a este tema cierta fama de inabordable salvo por especialistas. La enseñanza curricular del mismo, en general, se limita a un planteo rápido de las ecuaciones fundamentales, sin detenerse a destacar con claridad los fenómenos físicos involucrados. Una vez planteadas las ecuaciones, el esfuerzo del profesor se dirige a mostrar cómo es posible elaborar un programa de computadora para resolverlas. El resultado final de esta forma de proceder que oculta el hecho físico-primero en la formulación de las ecuaciones y luego en el análisis de las soluciones aplicadas a problemas concretos-es esa sensación que queda en el estudiante de que el tema es irremediablemente abstracto.

En este fascículo se ha tratado de enfatizar la descripción de los fenómenos físicos tanto en la formulación de las ecuaciones como en el análisis de sus soluciones. Con ese fin se ha modificado la exposición clásica de la ecuación de conservación de la masa separando, por un lado, el fenómeno de conservación de la masa y, por otro, las ecuaciones constitutivas del fluido y de la tubería. Asimismo, se ha tratado de presentar con rigor las hipótesis que supone el modelo y su justificación. Con ello se gana en claridad respecto al hecho físico y en una mayor comprensión de la estructura del modelo teórico.

En el análisis de las soluciones ondulatorias se ha tratado de exponer con particular detalle los fenómenos de reflexión de las ondas en tanques de carga constante y en extremos cerrados. Para ello se ha recurrido a series de dibujos muy simples donde se desglosa el papel jugado por la onda incidente y la reflejada en las fronteras aludidas.

Se ha dedicado también atención a la comparación entre el modelo con ondas y el modelo más familiar y sencillo de las oscilaciones de masa estableciéndose un criterio de validación del empleo de uno u otro.

Finalmente, este énfasis respecto a la presentación de los fenómenos físicos que el modelo procura reflejar, culmina con la comparación entre los resultados teóricos y experiencias cuidadosamente controladas en una instalación experimental de gran tamaño. Ello está orientado a darle al lector, por un lado, seguridad respecto al modelo que se propone y, por otro, una idea precisa de cuáles son sus limitaciones.

El fascículo termina con un capítulo referido a las bombas como causa fundamental de los transitorios en conducciones de agua a presión. En dicho capítulo se intenta presentar en forma organizada, y fundada en uno de los apéndices del fascículo, las ecuaciones que describen el comportamiento no estacionario de estas máquinas. En esta exposición se hace énfasis también en los fenómenos físicos ligados a las diversas formas de operación de la máquina en el breve intervalo de tiempo que dura el transitorio hidráulico.

2. ELEMENTOS TEORICOS CONSIDERANDO UNA TUBERIA RIGIDA Y FLUIDO INCOMPRESIBLE

En este capítulo se formularán las ecuaciones dinámica y de conservación de la masa aplicables a los transitorios hidráulicos en los que la tubería puede ser considerada rígida y el fluido incompresible. Esta hipótesis que para quién está habituado a trabajar con fenómenos hidráulicos estacionarios, es "natural", constituye sin embargo una simplificación extrema al tratar fenómenos transitorios. Como se verá en el capítulo 3, sección 12 su aplicabilidad está limitada a casos muy particulares y en general no debe ser aplicada. Para darle al lector un elemento de juicio respecto a las contradicciones con la realidad que esta hipótesis presenta, basta pensar en una tubería cuya longitud ℓ fuese todo lo grande que el lector quisiese. (figura 2.1). En dicha tubería se acondicionan dos pistones como se muestra en la figura y se mantiene llena de agua. Teniendo en cuenta la hipótesis de rigidez de la tubería e incompresibilidad del fluido, si el pistón 1 se desplaza Δx, el volumen del líquido $A.\Delta x$ que "desapareció" en el extremo 1, debe "aparecer" en el extremo 2 desplazándose instantáneamente el pistón 2 una distancia Δx. Este razonamiento es impecable puesto que la hipótesis realizada implica que no puede haber variaciones de diámetro ni de longitud en la tubería (rigidez) y tampoco puede haber variaciones en el volumen del líquido (incompresibilidad) por lo cual el volumen del recipiente solo puede variar debido al movimiento de los pistones. En consecuencia, por el razonamiento anterior el lector puede concluir que el dispositivo propuesto en la figura 2.1 es capaz de transmitir información instantáneamente de su extremo 1 a su extremo 2 independientemente de la distancia que existe entre ambos. Recordando que la velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s y la del sonido en el aire 340 m/s puede verse que la hipótesis de rigidez e incompresibilidad que parecía tan "natural" para quien está acostumbrado a tratar con fenómenos estacionarios da lugar a conclusiones extrañas en cuanto se le aplica con rigor a los fenómenos hidráulicos transitorios. El fenómeno descrito en la figura 2.1 implica, como se vió, una velocidad infinita de propagación de las perturbaciones de presión y gasto. En la realidad, como se verá más adelante, esta velocidad no puede ser mayor que 1450 m/s en agua limpia a 20°C. La existencia de una velocidad de propagación finita de las perturbaciones u ondas de presión y gasto y que esa velocidad sea lo suficientemente baja como para que en una tubería industrial corriente de por ejemplo 15 km, la onda emplee 10 segundos en recorrerla son hechos que, como se verá, tienen una influencia determinante en el comportamiento no estacionario de las conducciones a presión de uso industrial.

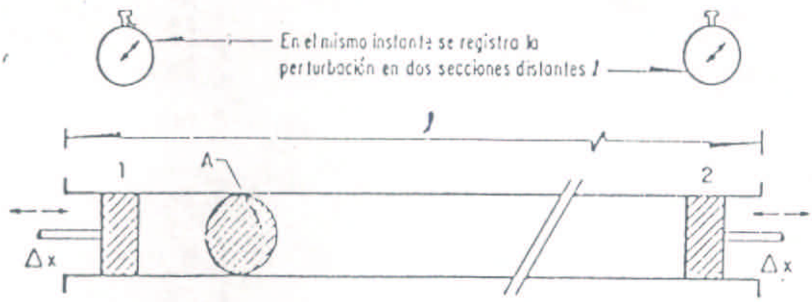


Fig 2.1 Tubería con paredes rígidas y fluido incompresible. Propagación de una perturbación con velocidad infinita.

Sin embargo por razones didácticas y porque algunos problemas reales pueden ser tratados con el modelo simplificado de tubería rígida y fluido incompresible, se comenzará estudiando este modelo.

2.1 Distribución de velocidades en el interior de una tubería recta en flujo no estacionario

Según lo ya visto en II.2.1, en flujo estacionario se formula la hipótesis de que la distribución de velocidades en la sección recta de una tubería recta puede considerarse uniforme con un valor igual a la velocidad media $V = Q/A$ siendo Q el gasto por la tubería y A el área de la sección recta de la misma. Esta hipótesis será mantenida para el flujo no estacionario donde $Q = Q(t)$ y $A(s)$ es independiente del tiempo por la hipótesis de rigidez de las paredes de la tubería, pudiendo en cambio depender de la coordenada axial s.

2.2 Distribución de presiones en el interior de una tubería recta en flujo no estacionario. Carga piezométrica

Revisando los razonamientos expuestos en II.2.2 puede verse que valen también si el flujo no es estacionario, en consecuencia todos los puntos de la sección recta poseen la misma carga piezométrica $h = p/\gamma + z$. Por lo tanto en la sección de coordenada axial s se tendrá para el instante t

$$h = h(s,t) \qquad (2.2.1)$$

2.3 Esfuerzo cortante ejercido por la pared sobre el fluido

La expresión del esfuerzo cortante τ presentada en II.2.3 debe ser revisada para flujo no estacionario. Existen numerosas evidencias que indican que el coeficiente de Moody f no expresa correctamente la relación entre τ y $\rho V^2/8$ cuando el flujo no es estacionario. Sin embargo hoy en día no se dispone de una relación equivalente a la (II.2.3.1) para flujo no estacionario. Por ello y como primera aproximación se mantendrá la relación

$$\tau(s,t) = f\,\frac{\rho V|V|}{8} \qquad (2.3.1)$$

donde f se obtiene del ábaco de Moody tomando la velocidad $V_o(s)$ del sistema en régimen estacionario para calcular el número de Reynolds Re. Estas observaciones respecto a la inexactitud de (2.3.1) deben tenerse presentes puesto que algunas discrepancias significativas entre el cálculo y la experiencia se explican precisamente a partir de dicha inexactitud.

2.4 Conservación de la masa

Valen íntegramente las consideraciones realizadas en II.2.4 respecto a la invariabilidad de ρ y a la no acumulación de fluido entre dos secciones por distantes que ellas estén entre sí. Por lo tanto vale para flujo no estacionario la ecuación

$$Q_1(t) = Q_2(t) \qquad (2.4.1)$$

entre los gastos que en el mismo instante t pasan por las secciones 1 y 2.

Debe señalarse que esta ecuación tan sencilla se modificará profundamente para el modelo con una velocidad finita para la propagación de las perturbaciones o lo que es equivalente, al admitir que la tubería no es rígida y/o el fluido es compresible.

2.5 Velocidades y aceleraciones

De acuerdo con (2.4.1) el gasto en una tubería rígida con fluido incompresible solo depende de t. Sin embargo según ya se vió en II.2.5, puede considerarse el área A de la sección recta como función de s sin que las consideraciones realizadas hasta el momento pierdan validez, de manera que:

$$V(s,t) = \frac{Q(t)}{A(s)} \qquad (2.5.1)$$

La aceleración a es la tasa de variación de la velocidad respecto al tiempo para un elemento de fluido que se desplaza con velocidad V siendo V función de s y de t, la derivada total respecto a t puede calcularse aplicando las reglas de derivación para una función de función. Calculando a se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s}\cdot\overbrace{\frac{ds}{dt}}^{=V} \qquad (2.5.2)$$

Comparando 2.5.1 con (II.2.5.3) se observa que en (2.5.2) aparece el término $\partial V/\partial t$ que corresponde a la tasa de variación de la velocidad respecto al tiempo en la sección de la tubería, que el elemento fluido cuya aceleración se desea calcular ocupaba en el instante t. Es la derivada parcial respecto a t de la función V(t,s) calculada en el instante t y para la sección de coordenada axial s. Se denomina derivada local de la velocidad.

$V\frac{dV}{ds} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds}$

Procediendo análogamente que en II.2.5 se concluye que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s} \qquad (2.5.3)$$

El hecho que aquí el término $\partial V/\partial t$ no sea siempre nulo es la única diferencia que existe entre las ecuaciones planteadas para flujo estacionario (II.2) y las aquí planteadas para flujo no estacionario.

2.6 Expresión de Bernoulli generalizada

Procediendo análogamente que en II.2.6 se llega para el flujo no estacionario a una expresión similar a la (II.2.6.4), esto es:

$$\frac{1}{g}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \text{sen}\ \alpha \qquad (2.6.1)$$

Ello no debe de sorprender al lector puesto que, como se acaba de señalar, la única diferencia entre ambos modelos radica en la expresión de la aceleración donde, para flujo no estacionario el término $\partial V/\partial t$ puede ser no nulo. Procediendo a introducir la expresión (2.5.3) de la aceleración en la ecuación (2.6.1) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{4\tau}{\gamma D} \qquad (2.6.2)$$

Expresión que se denominará de Bernoulli generalizada pues su validez no se limita a los flujos estacionarios sino que incluye los flujos no estacionarios. Para el empleo de la ecuación (2.6.2) es habitual sustituir $p/\gamma + z$ por h (carga piezométrica) y el esfuerzo cortante de la pared τ por la expresión (2.3.1) del mismo. En consecuencia la ecuación (2.6.2) se transforma en la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(h + \frac{V^2}{2g}\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} - f\,\frac{V|V|}{2gD} \qquad (2.6.3)$$

2.7 Ejemplos

Con los elementos desarrollados en las secciones precedentes se examinarán dos problemas que ilustran los conceptos expuestos y que luego serán de utilidad en el análisis de problemas de interés práctico en el diseño de acueductos.

2.7.1 Oscilaciones de masa entre una presa y un tanque de oscilación

En la figura 2.7.1 se presenta una presa conectada a una planta de bombeo en cuya succión se tiene un tanque de oscilación. La conexión se efectúa a través de una tubería de longitud ℓ y sección recta de área A. El área de la sección recta del tanque de oscilación es A_T. La planta de bombeo trabaja normalmente con un gasto Q_o que fluye desde la presa. Al detenerse la planta de bombeo es claro que el fluido que escurre por la tubería irá llenando el tanque de oscilación hasta que la carga en el extremo aguas abajo debida al ascenso del nivel de la superficie libre en el tanque detenga el flujo y lo invierta hacia la presa. El fenómeno oscilatorio se repetirá hasta que por fricción se disipe la energía cinética del flujo que escurría en la tubería en el momento de la detención de la planta de bombeo. A continuación se aplicará la ecuación de Bernoulli generalizada (2.6.3) al problema planteado y se discutirán sus resultados comparándolos con la descripción cualitativa realizada y con la cual el lector seguramente acordará.

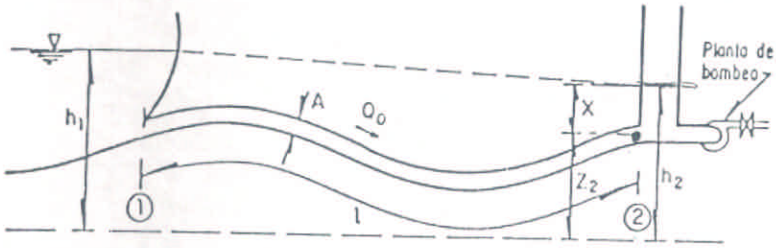


Fig 2.7.1 Oscilaciones de masa entre una presa y un tanque de oscilación.

La ecuación (2.6.3) se debe aplicar a la tubería. En el ejemplo estudiado se aplicará entre las secciones de entrada (sección 1) y de salida (sección 2) de la tubería. Debe procederse a integrar la ecuación entre dichas secciones según se indica a continuación

$$\int_0^{\ell} \frac{\partial}{\partial s}\left(h+\frac{V^2}{2g}\right)ds = -\frac{1}{g}\int_0^{\ell} \frac{\partial V}{\partial t}\,ds - \frac{f}{2gD}\int_0^{\ell} V^2 ds \qquad (2.7.1)$$

$V = f(t)$

Recordando que en la tubería V es constante pues A es constante, se tiene de (2.7.1) la siguiente ecuación diferencial:

$$\underbrace{h_2 - h_1}_{\text{pérdida de carga piezométrica}} = \underbrace{-\frac{\ell}{g}\frac{dV}{dt}}_{\text{pérdida debida a la inercia}} - \underbrace{f\,\frac{\ell}{D}\,\frac{V|V|}{2g}}_{\text{pérdida por fricción}} \qquad (2.7.2)$$

$h_2 = h_1 - O - O$

$a \uparrow \frac{dV}{dt}$ + pérdida de carga

V no depende de A

$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{dV}{dt}$

En esta ecuación se sustituyó $\partial V/\partial t$ por dV/dt pues siendo el área A constante V solo depende de t.

La ecuación (2.7.2) está indicando que la pérdida de carga piezométrica $h_2 - h_1$ entre los extremos de la tubería, puede descomponerse en un término de pérdida inercial que depende de la aceleración de la columna líquida dV/dt y en otro término de pérdida por fricción. Nótese que si el régimen fuese estacionario el término de pérdida inercial se reduce a cero ($\partial V/\partial t = 0$) y se tiene la expresión clásica de pérdida de carga piezométrica como función del cuadrado de la velocidad de la tubería.

Sin embargo en este capítulo el interés está centrado en los fenómenos no estacionarios. Para resolver el ejemplo planteado deberá agregarse a la ecuación (2.7.2) las condiciones de frontera, la ecuación de conservación de la masa y las condiciones iniciales (condiciones en las que opera el sistema en el momento en que la planta se detiene).

Las condiciones de frontera son:

$h_1 = h_o$, h_o constante, determinado por el nivel de la presa

$h_2 = z_2 + x$, siendo z_2 la cota del eje de la tubería en 2 y x la distancia vertical desde ese eje a la superficie libre del agua dentro del tanque de oscilación

La ecuación de conservación de la masa es:

$$\dot{x} A_T = VA \quad \text{con} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Las condiciones iniciales son:

$$x = x_o \ , \quad \dot{x} = V_o A/A_T \qquad \text{en} \quad t = 0$$

siendo $x_o = h_o - z_2 - f\ell V_o^2/D2g$ y V_o la velocidad en la tubería antes del paro. (Antes del paro el rég. es estacionario)

Imponiendo las condiciones de frontera y sustituyendo V por $\dot{x} \cdot A_T/A$ se tiene:

$$z_2 + x - h_o = - \frac{\ell A_T}{gA} \ddot{x} - \frac{f\ell}{2gD} \left(\frac{A_T}{A}\right)^2 \dot{x}|\dot{x}| \qquad (2.7.3)$$

Ordenando la ecuación se tiene:

$$\ddot{x} + b\, \dot{x}|\dot{x}| + cx = d \qquad (2.7.4)$$

siendo $b = fA_T/2DA$, $c = gA/\ell A_T$ y $d = (h_o - z_2)gA/\ell A_T$

La ecuación (2.7.4) no es integrable analíticamente si $b \neq 0$. $b = 0$ implica $f = 0$ (ausencia de fricción). Si $b \neq 0$ la integración debe efectuarse numéricamente. Como primera aproximación al problema planteado se considerará el caso en que $b = 0$. Ello facilita el análisis puesto que la ecuación (2.7.4) se transforma en una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Dicha ecuación será:

$$\ddot{x} + cx = d \qquad (2.7.5)$$

Haciendo el cambio de variable $X = x - d/c$ que equivale a tomar como origen de las X el nivel $x = h_0 - z_2$ (nivel del tanque de oscilación en condiciones de operación estacionaria con $f = 0$), se tiene:

$$\ddot{X} + cX = 0 \qquad (2.7.6)$$

Siendo $c > 0$, (2.7.6) es la ecuación del movimiento armónico y su solución es conocida $X = M \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$ con ω frecuencia circular del movimiento igual a:

$$\omega = \sqrt{c} = \sqrt{\frac{gA}{\ell A_T}} \qquad (2.7.7)$$

En consecuencia para $f = 0$ se tendrán oscilaciones armónicas de frecuencia circular ω dada por la expresión (2.7.7). Nótese que el resultado (2.7.7) coincide con la frecuencia de un péndulo de longitud $\ell' = \ell\, A_T/A$. Para calcular M deben emplearse las condiciones iniciales del problema. En $t = o$, $X = o$ y $\dot{X} = V_o A/A_T$, en consecuencia sustituyendo $t = o$ en $X = M \operatorname{sen} (\omega t+\phi)$ y en $\dot{X} = M\,\omega \cos (\omega t + \phi)$ e imponiendo las condiciones iniciales se tiene:

$$\phi = 0 \quad , \quad M = \frac{V_o A}{A_T \omega} \qquad (2.7.8)$$

Para una tubería con $\ell = 4795$ m, con $A/A_T = 0.0523$ y $V_o = 1.52$ m/s se tiene $\omega = 0.0103$ lo cual significa un periodo $T = 2\pi/\omega = 607$ s.

Aplicando (2.7.8) para calcular M en este caso particular se tiene $M = 7.73$ m. Se tendrá en consecuencia una oscilación de amplitud pico a pico de 15.46 m. Esta oscilación debe ser tenida en cuenta al dimensionar el tanque de oscilación. De no tenerse en cuenta, en cada paro de la planta de bombeo hay riesgo de que se derrame agua por el coronamiento del tanque. Para un gasto de 4 m^3/s, con un periodo de 10 minutos aproximadamente pueden derramarse cientos de metros cúbicos en virtud de la oscilación de masa. Si el tanque es alto (decenas de metros), este accidente repetido muchas veces puede llegar a dañar la cimentación del propio tanque.

2.7.2 Descenso de presión causado por la inercia de una tubería

En la figura 2.7.2 se presenta un tanque unidireccional conectado a un acueducto. Este tanque enviará agua hacia el acueducto cuando la carga piezométrica en éste sea menor que el nivel de agua en el tanque. Es claro para el lector que la rapidez con que el tanque es capaz de suministrar un gasto Qo dado al acueducto, luego de que la piezométrica de la línea cayó por debajo del nivel de la superficie libre del tanque, depende de la longitud ℓ de la tubería de conexión. A igualdad de pérdidas el lector puede intuir que cuanto mayor sea ℓ más lentamente responderá el tanque con una inyección de un gasto Q_o. Este hecho tiene mucha significación práctica pues la caída de la piezométrica en un acueducto puede ocurrir con velocidades del orden de las decenas de metros de columna de agua por segundo. En consecuencia, una respuesta por parte del tanque que se atrase en fracciones de segundo, puede causar depresiones peligrosas en la línea. Para estudiar cuantitativamente este fenómeno, se aplicará el modelo desarrollado en este capítulo.

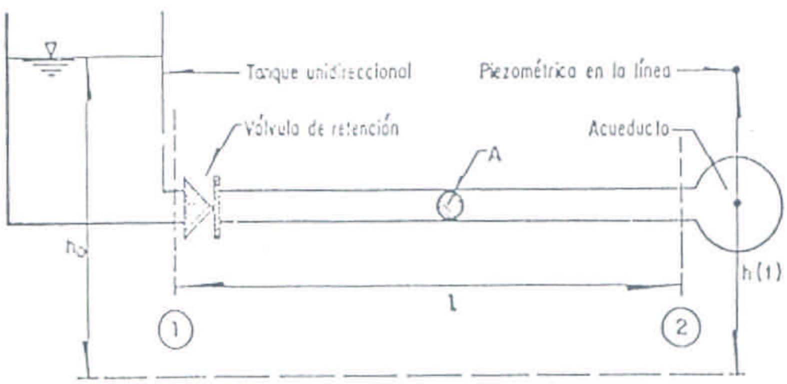


Fig 2.7.2 Tanque unidireccional conectado a un acueducto por medio de una tubería de longitud l.

La ecuación a emplear es la (2.7.2). Las condiciones de frontera son $h_1 = h_0$ y $h_2 = h(t)$. La condición inicial es V=0 en t=0. Admitiendo que $f = o$ y que $h(t) = h_o - \alpha t$ con $\alpha > 0$, en una primera aproximación que permite abordar analíticamente el problema, se tiene:

$$- \alpha t = - \frac{\ell}{Ag} \frac{dQ}{dt} \qquad (2.7.9)$$

donde se sustituyó V por Q/A. (2.7.9) es una ecuación diferencial lineal con variables separables. Integrándola resulta:

$$Q = \frac{Ag}{\ell} \cdot \frac{\alpha t^2}{2} \qquad (2.7.10)$$

En consecuencia, el gasto crecerá cuadráticamente con t. Para determinar tiempo que tarda el tanque en suministrar el gasto Q_o se despejará t de (2.7.10) luego de sustituir Q por Q_o. Para que el lector adquiera una idea cuantitativa de la significación de la inercia de la columna líquida se calculará t para el siguiente caso. $Q_o = 3\ m^3/s$, $A = 1.13\ m^2$, $\ell = 100\ m$, $h_o = 60\ m$, $\alpha = 10\ m/s$.

Procediendo a resolver la ecuación de segundo grado (2.7.10) para t, se obtiene t = 2.33 s. Ello implica que en el proceso de establecerse el gasto Q_o desde el tanque a la línea, la piezométrica en el acueducto desciende 2.33 α = 23.3 m.c.a. por debajo del nivel de la superficie libre en el tanque. Como el lector puede ver es un descenso muy considerable y que reduce considerablemente la eficacia del tanque unidireccional para mantener la presión en el acueducto. De este ejemplo puede concluirse como regla práctica que el tanque debe colocarse lo más próximo que se pueda a la tubería. Como habitualmente en los tanques unidireccionales de uso industrial ℓ no es pequeño (decenas de metros), ello implica disponer una tubería de conexión con un área A suficiente, puesto que, como se observa en la ecuación 2.7.9, allí aparece el cociente ℓ/A. Por ello, si ℓ crece debe aumentarse A para controlar el efecto de la inercia de la columna líquida sobre la piezométrica del acueducto cuando ésta se halla por debajo del nivel de la superficie libre del tanque unidireccional.

3. ELEMENTOS TEORICOS CONSIDERANDO UNA TUBERIA CON PARED ELASTICA Y FLUIDO COMPRESIBLE

3.1 Distribución de velocidades en el interior de una tubería recta

La hipótesis que se efectuará en cuanto a la distribución de la velocidad es la misma que la formulada en II.2.1 para flujo estacionario y ya dentro de este fascículo la misma hipótesis también se efectuó en 2.1 para flujo no estacionario, pared rígida y fluido incompresible. Se admitirá pues una distribución uniforme con un valor igual a la velocidad media $V = Q/A$.

3.2 Distribución de presiones. Carga piezométrica

Si se examinan los razonamientos expuestos en II.2.2 se observa que tienen validez aunque la sección varíe su área con el tiempo, siempre que dicha variación sea suficientemente pequeña como para que las trayectorias mantengan radios de curvatura muy grandes. Teniendo presente esta condición puede concluirse que todos los puntos de la sección recta poseen la misma carga piezométrica $h = p/\gamma + z$. En consecuencia, para la sección de coordenada axial s en el instante t, se tendrá:

$$h = h\ (s,t) \qquad (3.2.1)$$

3.3 Esfuerzo cortante ejercido por la pared sobre el fluido

Valen para el caso de tubería con pared elástica y fluido compresible las consideraciones realizadas para el caso de pared rígida y fluido incompresible. Poco se sabe hoy en día de la relación de $\tau(s,t)$ con la distribución instantánea de velocidades en la sección de coordenada axial s en el instante t. Como primera aproximación entonces se adoptará también la expresión (2.3.1), a saber:

$$\tau\,(s,t) = f\,\frac{\rho V^2}{8} \qquad (3.3.1)$$

donde f se obtiene igual que en 2.3.

3.4 Conservación de la masa

3.4.1 Conservación de la masa para un fluido compresible en una tubería de pared rígida

En primer lugar se analizará la expresión de la ecuación de conservación de la masa por un fluido compresible, esto es un fluido cuya densidad es función de la presión, fluyendo en una tubería de pared rígida.

En la figura 3.4.1 se presentan dos secciones transversales de una tubería de sección constante A que distan Δs entre sí. El balance de masa entre dichas secciones es el siguiente:

$$\underbrace{\rho V A \Delta t}_{\substack{\text{masa entrante}\\ \text{en } \forall \text{ durante } \Delta t}} - \underbrace{\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial s}\Delta s\right)\left(V+\frac{\partial V}{\partial s}\Delta s\right)A\Delta t}_{\substack{\text{masa saliente de}\\ \forall \text{ durante } \Delta t}} = \underbrace{\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\right)A\Delta s-\rho A\Delta s}_{\substack{\text{masa acumulada}\\ \text{en } \forall \text{ durante } \Delta t}} \qquad (3.4.1)$$

Dividiendo entre A.Δs.Δt, y operando se tiene:

$$-\rho\,\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{V\partial\rho}{\partial s} - \frac{\partial\rho}{\partial s}\cdot\frac{\partial V}{\partial s}\,\Delta s = \frac{\partial\rho}{\partial t} \qquad (3.4.2)$$

Reordenando (3.4.2) y pasando al límite para $\Delta s \to 0$ se concluye que:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{\partial V}{\partial s} = 0}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial V}{\partial s} + V\,\frac{\partial\rho}{\partial s} = 0 \qquad (3.4.3)$$

Como las variaciones de ρ se producen como consecuencia de las variaciones de presión en el interior de la tubería, pueden escribirse las siguientes relaciones: $\rho(p,s)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial\rho}{\partial s} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial s} \qquad (3.4.4)$$

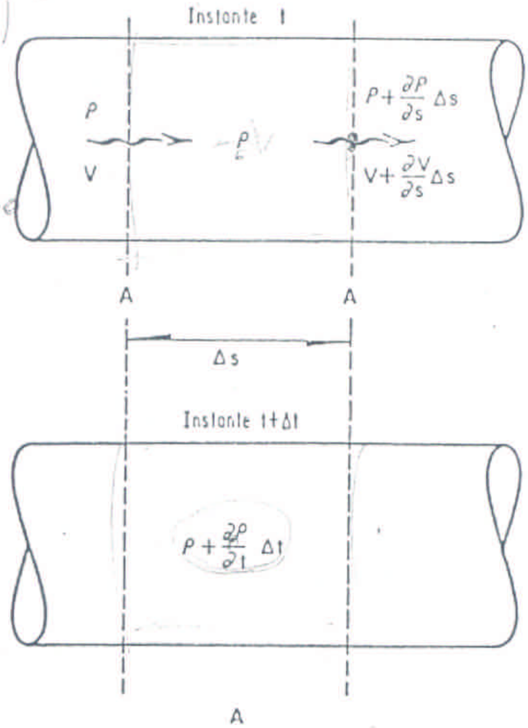


Fig 3.4.1 Balance de masa en una tubería de pared rígida y con un fluido compresible.

Sustituyendo en (3.4.3) y operando se obtiene finalmente

$$\frac{\partial\rho}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + V\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \rho\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \qquad (3.4.5)$$

3.4.2 Conservación de la masa para un fluido compresible en una tubería de pared elástica

El hecho que la pared sea elástica implica que $A(s,t)$. En consecuencia este hecho debe introducirse en el balance que implica la ecuación de conservación de masa. La ecuación modificada es la siguiente

$$\underbrace{\rho V A \Delta t}_{\substack{\text{masa}\\ \text{entran-}\\ \text{te en } \forall\\ \text{durante}\\ \Delta t}} - \underbrace{\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial s}\Delta s\right)\left(V+\frac{\partial V}{\partial s}\Delta s\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial s}\Delta s\right)\Delta t}_{\text{masa saliente de } \forall \text{ durante } \Delta t} = \text{masa acumulada en } \forall \text{ durante } \Delta t$$

$$\text{masa acumulada en } \forall \text{ durante } \Delta t = \left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta t\right)\left(A+\frac{\partial A}{\partial t}\Delta t\right)\Delta s - \rho A\Delta s \qquad (3.4.6)$$

En la figura 3.4.2 se ilustra el balance realizado entre dos secciones rectas que distan entre sí Δs. Dividiendo entre $A.\Delta s.\Delta t$, y haciendo tender $\Delta t \to o$ y $\Delta s \to o$ y operando se concluye la siguiente ecuación:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial V}{\partial s} + V\frac{\partial\rho}{\partial s} + \frac{\rho}{A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\rho}{A}V\frac{\partial A}{\partial s} = 0 \qquad (3.4.7)}$$

Esta ecuación es la ecuación de la conservación de la masa para un fluido compresible y tubería de pared elástica. Nótese que si A = cte(3.4.7) se transforma en (3.4.3).

Como las variaciones de ρ y de A son producidas por las variaciones de presión en el interior de la tubería, la ecuación (3.4.7) puede escribirse también introduciendo las relaciones (3.4.4). Sustituyendo estas relaciones en (3.4.7) y operando resulta:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial t} + V\frac{\partial p}{\partial s}\right) + \rho\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \qquad (3.4.8)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho A V)}{\partial s} = 0$$ Ecuación de Masa

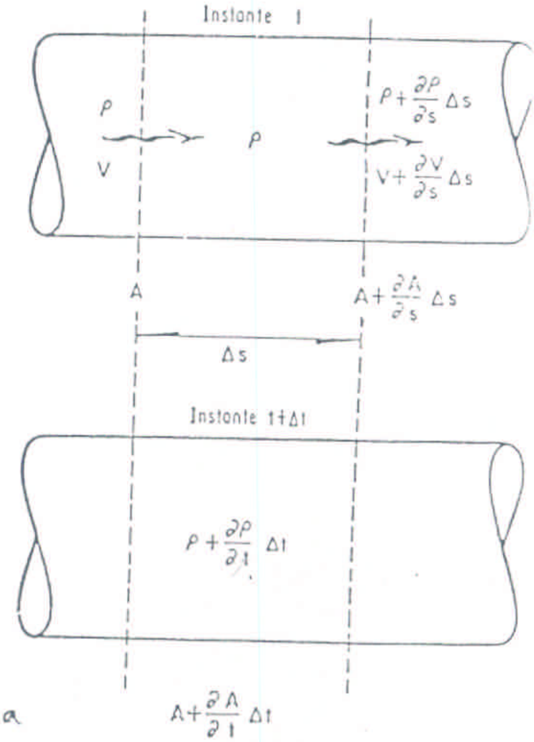


Fig 3.4.2 Balance de masa en una tubería de pared elástica y con un fluido compresible.

3.5 Velocidades y aceleraciones

Recordando de que en este modelo así como en el modelo precedente se admitió una distribución uniforme de velocidades (sección 3.1), la expresión de las aceleraciones será la misma que para el modelo con pared rígida y fluido incompresible, a saber:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V\,\frac{\partial V}{\partial s} \qquad (3.5.1)$$

3.6 Expresión de Bernoulli generalizada

Para simplificar el análisis de los fenómenos estudiados de aquí en adelante se trabajará con una tubería que al estar equilibradas las presiones exterior e interior su diámetro es constante (D_o = cte). Asimismo se admitirá que las constantes elásticas (espesor e, módulo de Young E, coeficiente de Poisson y condiciones de amarre) son uniformes a lo largo de la tubería. Respecto a la variación del diámetro D_o con la fluctuación de la presión interior se admitirá que dichas variaciones ΔD son despreciables frente al valor de D_o.

Primera hipótesis $\qquad \left|\frac{\Delta D}{D_o}\right| \ll 1 \qquad (3.6.1)$

Esta hipótesis se discutirá posteriormente en el apéndice AIII2. Bajo esta condición, todos los razonamientos que se emplearon para hallar la ecuación dinámica en el capítulo precedente mantienen su validez. En consecuencia se obtendrá una ecuación dinámica igual a la (2.6.1), a saber:

$$\frac{1}{g}\,\frac{dV}{dt} = -\,\frac{1}{\gamma}\,\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{4\tau}{\gamma D} - \operatorname{sen}\alpha \quad = \frac{\partial z}{\partial s} \qquad (3.6.2)$$

donde $\gamma = \rho g$ es el peso específico del fluido. A continuación se formulará una segunda hipótesis de simplificación. Como la anterior, esta segunda hipótesis será discutida críticamente más adelante, en el apéndice A III 2. Esta segunda hipótesis establece que:

Segunda hipótesis $\qquad \left|\frac{\partial V}{\partial t}\right| \gg \left|V\frac{\partial V}{\partial s}\right| \qquad (3.6.3)$

para todo punto s y todo instante t de la región de integración de la ecuación (3.6.2) en el plano s,t, salvo quizas un número finito de parejas s,t en dicha región.

Recordando la expresión (3.5.1) de la aceleración, aplicando la segunda hipótesis e introduciendo en (3.6.2) la carga piezométrica calculada con el peso específico del fluido $\gamma_o = \rho_o g$ donde ρ_o es la densidad de referencia $h = p/\gamma_o + z$, se tiene: $\left|\frac{\Delta\rho}{\rho_o}\right| << 1$ 3er hipótesis

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0} \qquad (3.6.4)$$

Ecuación dinámica

donde el esfuerzo cortante fue sustituido por su expresión (3.3.1). (3.6.4) es la expresión de Bernoulli generalizada correspondiente a este modelo.

3.7 Ecuaciones constitutivas

El lector habrá observado que para la formulación de las ecuaciones de conservación de la masa (3.4.8) y la ecuación dinámica (3.6.4) no fue necesario establecer las ecuaciones constitutivas de la compresibilidad del fluido y de la elasticidad de la tubería. Sin embargo examinando las funciones desconocidas que aparecen en estas dos ecuaciones ellas son p (s,t), V (s,t), ρ(s,t) y A (s,t). Son pues cuatro funciones incógnitas. Por lo tanto para que el problema resulte en principio determinado, faltan dos ecuaciones más. Estas dos ecuaciones son precisamente las mencionadas ecuaciones constitutivas.

3.7.1 Ecuación constitutiva del fluido

El comportamiento del fluido se describe mediante la siguiente ecuación

$$\boxed{\frac{d\rho}{dp} = \frac{\rho_o}{K}} \qquad (3.7.1)$$

Como $\left|\frac{\Delta\rho}{\rho_o}\right| << 1 \Rightarrow \left|\frac{\Delta p}{K}\right| << 1$

en definitiva para fines prácticos

la $\Delta p < 100 kg/cm^2 \Rightarrow$ se cumple que $\left|\frac{\Delta p}{K}\right| << 1$ $\sim 5 \times 10^{-3}$

$K = f(t, p)$

donde ρ_o es una densidad de referencia a partir de la cual se consideran las variaciones de ρ. K es el módulo de compresibilidad volumétrica del fluido. En la tabla 3.7.1 se presenta la variación de este módulo con la presión y la temperatura para el agua.

si cambio de densidad es < 5‰ se toma al fluido como incompresible en hidrodinámica. Sin embargo aunque sea la 5‰ la $\Delta\rho$ igual debemos considerarlo compresible a efectos de interpretaciones entre realidad y modelo.

Tabla 3.7.1. Variación del módulo de compresibilidad volumétrica del agua con la temperatura y presión.

Presión ($\vec{Kg}/cm^2$)	Módulo de compresibilidad volumétrica del agua, K ($\vec{Kg}/m^2$) 0°C	20°C	49°C	93°C
1	2.080×10^8	2.243×10^8	2.334×10^8	2.172×10^8
100	2.109×10^8	2.320×10^8	2.405×10^8	2.242×10^8
300	$2.2?9 \times 10^8$	2.446×10^8	2.545×10^8	2.376×10^8
1000	2.672×10^8	2.883×10^8	2.995×10^8	2.847×10^8

3.7.2 Ecuación constitutiva de la tubería

La ecuación constitutiva de la tubería, que describe el comportamiento elástico de la misma es

$$\frac{\partial R}{\partial p} = C \qquad (3.7.2)$$

donde C es una constante que depende del espesor de la pared del tubo, de su radio interior R, del módulo de Young E y del coeficiente de Poisson ν del material de la tubería y también del tipo de amarre que ésta tenga. Ver figura 3.7.1. Por ejemplo, para un tubo de pared delgada, de espesor e, con juntas de expansión que eliminen las tensiones axiales, puede deducirse de inmediato que $C=R_0^2/Ee$. Nótese que en una tubería rígida C = 0.

$E = 2.1\times10^{10}$ kg/m^2

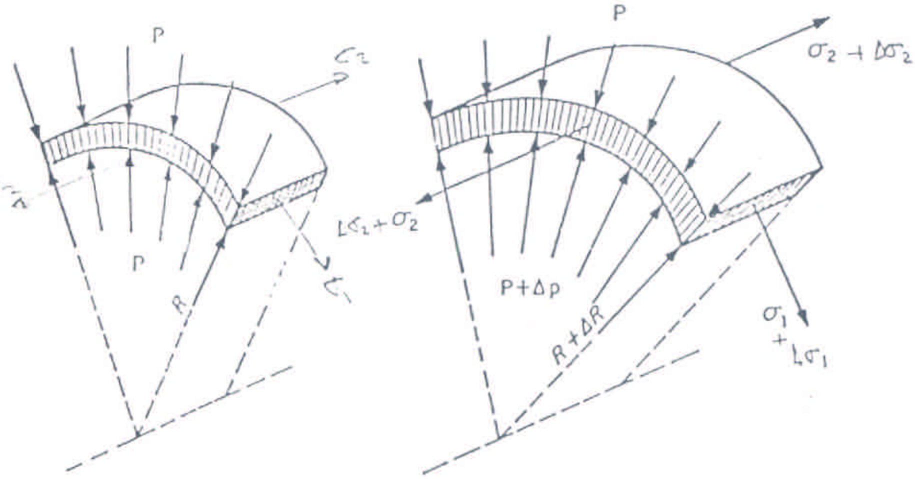
$\Delta p = 100$ kg/cm^2 $= 10^6$ kg/m^2

Si $\frac{R_0}{e} \sim 100$

$\frac{\Delta D}{D_0} \sim 5\times10^{-3}$

Se verifica $\left|\frac{\Delta D}{D_0}\right| \ll 1$

a efecto del uso industrial que se da al modelo. (Materiales con hormigón, acero, etc.)



σ_1 tensión tangencial $\quad$ σ_2 tensión axial (depende de las condiciones de amarre)

a) Presión interior igual a la presión exterior

b) Presión interior mayor en Δp que la presión exterior

Fig 3.7.1 Variación del radio de una tubería debido a la variación de la presión interna.

Las ecuaciones (3.7.1) y (3.7.2) son las dos ecuaciones que junto con la de conservación de la masa (3.4.8) y la ecuación dinámica (3.6.4) completan el sistema de ecuaciones diferenciales que debe considerarse para resolver el modelo propuesto.

3.8 Ecuaciones, condiciones iniciales y condiciones de frontera

3.8.1 Ecuaciones

$\frac{\rho}{A}\left(\frac{A}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}\right.$

De acuerdo a lo visto el modelo se caracteriza por las siguientes cuatro ecuaciones diferenciales.

$\frac{\partial \rho}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$

Conservación de la masa

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A}\frac{\partial A}{\partial p}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial t} + V\frac{\partial p}{\partial s}\right)}_{\frac{d p}{d t}} + \rho\frac{\partial V}{\partial s} = 0 \qquad (3.4.8)$$

Ecuación dinámica

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2gD} = 0 \qquad \boxed{(3.6.4)}$$

Ecuación Dinámica

Sebastiancito mi vida

Ecuación constitutiva del fluido

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho_0}{K}} \qquad (3.7.1)$$

Si $K \to \infty$ estamos en flujo incomp.

Tal. Solo la segunda vez después 7a no duele

Ecuación constitutiva de la tubería

$$\frac{\partial R}{\partial p} = C \qquad (3.7.2)$$

Nunca estuve con un chileno

donde $h = p/\gamma_0 + z$ y A es el área de la sección recta de la tubería.

$D = \pi^2 \cdot \pi = A$

$\frac{D^2}{4} \cdot \pi = A$

$\sqrt{\frac{4A}{\pi}}$

Es sencillo reducir el sistema de cuatro ecuaciones a un sistema de dos ecuaciones sustituyendo las ecuaciones constitutivas en la ecuación de conservación de la masa. En efecto; el primer factor del primer sumando de (3.4.8) puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\rho}{A}\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{\rho_0}{K} + \frac{2\rho C}{R} = \rho_0 \left(\frac{1}{K} + \frac{\rho}{\rho_0}\frac{2C}{R}\right) = \frac{1}{a^2} \qquad (3.8.1)$$

Usualmente se formula una nueva hipótesis que permite simplificar (3.8.1). Esta tercera hipótesis es la siguiente

$$\text{Tercera hipótesis:} \qquad \left|\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right| << 1 \qquad (3.8.2)$$

para todo s y t de la región de integración, salvo quizás un número finito de puntos s, t dentro de la región. Como las hipótesis precedentes esta hipótesis también será discutida críticamente en el apéndice A III 2. Empleando (3.8.2) resulta que:

$\frac{\partial A}{\partial p} = 2R\pi \frac{\partial R}{\partial p}$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_0 + \Delta\rho}{\rho_0} \cong 1 \qquad (3.8.3)$$

Por lo tanto aplicando este resultado puede escribirse que $\rho_0\ (1/K + 2\rho C/\rho_0 R) \cong \rho_0(1/K + 2C/R)$. Se definirá ahora el siguiente parámetro:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\ \left(\frac{1}{K} + \frac{2C}{R}\right)}} \qquad (3.8.4)$$

$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{A}\frac{d\rho A}{dp}$

Si tubería rígida $a^2 = \frac{dp}{d\rho}$.

El parámetro a tiene las dimensiones de una velocidad y se denominará "celeridad". Más adelante se verá el significado físico del mismo. Para escribir en forma definitiva la ecuación de conservación de la masa (3.4.8) conviene realizar una cuarta hipótesis, a saber:

a será la velocidad del sonido en el agua (en caso de tubería rígida o no).

Claudia: No estoy satisfecha

Cuarta hipótesis: $\left|\frac{\partial p}{\partial t}\right| >> \left|V\frac{\partial p}{\partial s}\right|$ (3.8.5)

Como se señaló anteriormente las cuatro hipótesis formuladas serán analizadas críticamente después. Aplicando (3.8.3), (3.8.4) y (3.8.5) en la ecuación (3.4.8) se tiene la siguiente expresión de la ecuación de conservación de la masa para este modelo:

$$\boxed{\frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial V}{\partial s} = 0} \qquad (3.8.6)$$

Conservación de Masa

Nótese que sí en la expresión de a se hace C = 0, lo que equivale a considerar una tubería con pared rígida, la ecuación (3.8.6) se transforma en la (3.8.7).

$$\left(\frac{\rho_o}{K}\right)\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \qquad (3.8.7)$$

Esta ecuación es la (3.4.5) que fue deducida directamente para un fluido compresible fluyendo en una tubería con pared rígida en la cual $\partial\rho/\partial p$ aquí se sustituyó por ρ_o/K de acuerdo con (3.7.1) y se aplicaron las hipótesis (3.8.2) respecto a ρ y la hipótesis (3.8.5) respecto a la magnitud relativa de las derivadas de la presión. En consecuencia puede concluirse que este modelo (fluido compresible y tubería elástica) tiene como límite para C = 0 el modelo de fluido compresible y tubería rígida estudiado anteriormente.

En el apéndice A III 3 se muestra que el modelo con fluido compresible y tubería elástica puede ser también interpretado como un modelo con tubería de pared rígida por la cual fluye un fluido compresible imaginario denominado "fluido compresible equivalente".

En conclusión, luego de incorporar las ecuaciones constitutivas a la ecuación de conservación de la masa, las cuatro ecuaciones diferenciales (3.4.8), (3.6.4), (3.7.1) y (3.7.2) presentadas al comienzo de esta sección, se reducen a dos, la ecuación dinámica (3.6.4) y la ecuación (3.8.6) hallada más arriba.

Para finalizar se harán algunas transformaciones en estas dos ecuaciones para llevarlas a la forma con que serán utilizadas de aquí en adelante.

En primer lugar aplicando la tercera hipótesis respecto a ρ se pondrá $p = \gamma_o h - \gamma_o z$, por lo tanto $\partial p/\partial t = \gamma_o \partial h/\partial t$. En segundo lugar, aplicando la primera hipótesis respecto a la variación de D

respecto a s y a t, se puede considerar $Q \sim V A_o$, → por simplificación, en estos casos
por lo tanto sustituyendo en (3.6.4) y (3.8.6) y
reordenando se llega finalmente a estas dos
ecuaciones fundamentales

$Q = VA \sim V A_o$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{gA}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \qquad \text{Conservación de la masa+ constitutivas} \qquad (3.8.8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial h}{\partial s} + \underbrace{\frac{fQ|Q|}{2DA}}_{\text{único término no lineal x las 2 simplificaciones 3.85 y 3.6.3}} = 0 \qquad \text{Dinámica} \qquad (3.8.9)$$

Variable Q, h.

Las ecuaciones (3.8.8) y (3.8.9) constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden cuyas funciones incógnitas son $Q\ (s,t)$ y $h\ (s,t)$. Para hallarlas se requiere conocer las condiciones iniciales y las condiciones de frontera. Las condiciones iniciales en este problema son las funciones:

$$\left.\begin{aligned} Q &= Q(s,o) \\ h &= h(s,o) \end{aligned}\right\} \text{condiciones iniciales} \qquad (3.8.10)$$

Las ecuaciones (3.8.10) indican que en el instante inicial t=0 debe conocerse el valor del gasto Q y de la carga piezométrica h en todos los puntos del sistema.

Las condiciones de frontera pueden presentar formulaciones diferentes pero, para que sea posible la resolución del sistema, éstas deben equivaler a conocer el gasto o la carga piezométrica o la relación entre ambos en los extremos de la tubería para todo t. Más adelante se examinará una serie de condiciones de frontera de interés práctico.

Nótese que la ecuación de conservación de la masa + constitutivas (3.8.8) es lineal en las derivadas parciales y los coeficientes son constantes. La ecuación (3.8.9) no es lineal debido a la fricción. En dicho término aparece el gasto al cuadrado.

Siguiendo el mismo procedimiento empleado en el capítulo 2 de este fascículo, a continuación se analizará el sistema (3.8.8) (3.8.9) suponiendo que f=0 (sin fricción). Al linealizarse el sistema se obtiene una considerable simplificación en el análisis cualitativo de las soluciones posibles. En consecuencia, para comprender mejor el fenómeno físico estudiado, en la próxima sección se analizarán con algún cuidado las soluciones del sistema linealizado. Como ocurre frecuentemente en los problemas de fluidos, el estudio del problema sin fricción si bien puede dar soluciones que no se ajustan cuantitativamente al comportamiento real, permite profundizar en el conocimiento del fenómeno físico. Esta falta de exactitud en los resultados suele estar compensada por la facilidad relativa que se tiene, desde el punto de vista matemático, para abordar el problema.

3.9 Ecuaciones linealizadas y su solución

3.9.1 Solución del sistema linealizado (sin fricción)

Como ya se dijo la linealización se obtiene al considerar nula la fricción (f=0) y el sistema resultante es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{gA}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\,\frac{\partial h}{\partial s} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.1)$$

Una forma clásica de resolver este sistema es proceder a realizar el siguiente cambio de variable

$$\eta = s + at \quad , \quad \varepsilon = s - at \qquad (3.9.2)$$

En consecuencia, realizando el cambio de variables se tendrá $Q(\eta,\varepsilon)$ y $h(\eta,\varepsilon)$. Las derivadas de estas nuevas funciones deberán cumplir ecuaciones que se pueden deducir del sistema (3.9.1). En efecto, calculando dichas derivadas mediante las reglas conocidas de la derivación de funciones de dos variables, se tiene:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon} \\ &\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial \eta}\,a - \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon}\,a \\ &\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \\ &\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \eta}\,a - \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}\,a \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.3)$$

Sustituyendo ahora $\partial Q/\partial s$, $\partial Q/\partial t$, $\partial h/\partial s$, $\partial h/\partial t$ en (3.9.1) por sus valores calculados en (3.9.3) en función de η y ε, se tiene, agrupando las derivadas, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Q + \frac{gA}{a}h\right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(Q - \frac{gA}{a}h\right) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Q + \frac{gA}{a}h\right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(Q - \frac{gA}{a}h\right) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.4)$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Q + \frac{gA}{a} h\right) = 0 \qquad (3.9.5)$$

Restando ambas ecuaciones entre sí, se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(Q - \frac{gA}{a} h\right) = 0 \qquad (3.9.6)$$

En consecuencia, el sistema (3.9.1) se ha transformado en otro sistema constituido por las ecuaciones (3.9.5) y (3.9.6) cuya solución es trivial ya que (3.9.5) indica que $Q + hgA/a$ es una función que no depende de η, por lo tanto será función únicamente de ε y análogamente (3.9.6) indica que $Q - hgA/a$ es una función que no depende de ε, en consecuencia será función solamente de η. El anterior razonamiento significa pues que:

$$\left.\begin{aligned} Q + \frac{gA}{a} h &= 2\left[F(\varepsilon) + C_1\right] \\ Q - \frac{gA}{a} h &= 2\left[G(\eta) + C_2\right] \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.7)$$

$F(\varepsilon) = Q + \frac{gA}{a} h + C$

donde F y G son funciones arbitrarias de las respectivas variables y C_1 y C_2 son constantes arbitrarias.

El factor 2 se hace aparecer, como se verá, para simplificar los resultados posteriores. Las funciones $F(\varepsilon)$, $G(\eta)$ y C_1, C_2 quedarán determinadas únicamente por las condiciones iniciales y de frontera. (3.9.7) es ahora un sistema lineal algebraico de dos ecuaciones y dos incógnitas Q y h. Procediendo a despejar Q y h se tiene el siguiente resultado:

$$\left.\begin{aligned} Q &= F(\varepsilon) + G(\eta) + C_1 + C_2 \\ h &= \frac{a}{gA}\left[F(\varepsilon) - G(\eta)\right] + \frac{a}{gA}(C_1 - C_2) \end{aligned}\right\} \qquad (3.9.8)$$

Sustituyendo η y ε por sus expresiones (3.9.2) en función de s y t se llega finalmente a la solución general del sistema (3.9.1), a saber:

$$Q - Q_o = F(s - at) + G(s + at) \qquad (3.9.9)$$

$$h - h_o = \frac{a}{gA}\left[F(s - at) - G(s + at)\right] \qquad (3.9.10)$$

$$\begin{cases} F(c) + G(n)\big|_{t=0} = 0 \\ F(c) - G(n)\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

donde $C_1 + C_2 = Q_o$ y $(C_1 - C_2)a/gA = h_o$ y como ya se dijo, las funciones F y G son arbitrarias. La determinación de F, G, Q_o y h_o para cada caso

~~porqe~~ porque estamos en t=0 en el estacionario F y G = 0 particular, se efectúa por medio de las condiciones iniciales de la conducción y de las condiciones de frontera impuestas en los extremos de la misma.

$Q_o = Q(s,0) = Q(s)$
$h_o = h(s,t) = h(s)$

3.9.2 Interpretación de las soluciones

$Q(0,t)$, $h(0,t)$

$Q_0 = Q(s,0)$
$H_0 = h(s,0)$

Obtenidos los resultados indicados en (3.9.9) y (3.9.10) interesa ahora realizar su interpretación física. Para ello conviene analizar el comportamiento de una función $F(\varepsilon)$ con $\varepsilon = s - at$.

Para el análisis se tomará una función simple, la función escalón, definida de la siguiente forma:

$$F(\varepsilon) = 1 \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$$
$$F(\varepsilon) = 0 \qquad \varepsilon_1 < \varepsilon \qquad (3.9.11)$$

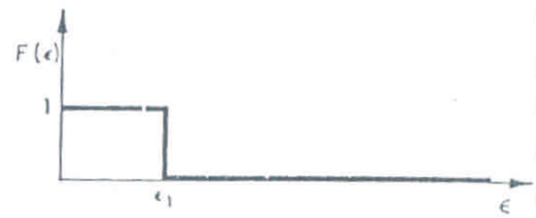
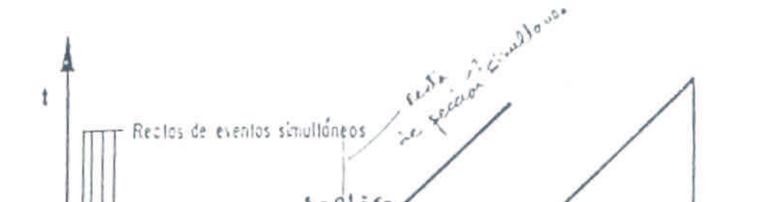


Fig 3.9.1 Función escalón F(ε).

cuya representación gráfica se muestra en la figura 3.9.1.

Por otra parte, en el plano s,t la función ε = s-at es una familia de rectas cuyas abscisas en t=0 valen ε y su coeficiente angular vale 1/a. En la figura 3.9.2 se presentan varias rectas con diferentes valores de ε y varias rectas sobre las cuales t es constante. Sobre las rectas t con constante se ubican los eventos que ocurren en el mismo instante t a lo largo de la tubería. Como se indica en la figura, sobre cada recta con ε constante el valor de s-at es constante para todo t.



$\mathcal{E} = s - at$

$t = \frac{s-\mathcal{E}}{a}$

Fig 3.9.2 Representación de ϵ = s-at en el plano (s,t).

En la figura se indica también el extremo de la tubería s = ℓ. Disponiendo de las dos figuras es sencillo interpretar la figura 3.9.3. Esta figura es una vista en perspectiva de la función F(s,t) = F(s-at). En dicha figura se han destacado las gráficas de la función $F(s,t)$ para los instantes $t=0$, $t=t_1$, $t=t_2$ y $t=t_3$. Es evidente, a partir de la perspectiva mostrada, que el escalón va avanzando por la tubería hacia el extremo $s = \ell$ cuando t crece. La velocidad de avance es a (celeridad). Aquí se observa con claridad el significado físico de la celeridad. Es la velocidad con la que se desplazan las perturbaciones a lo largo de la tubería.

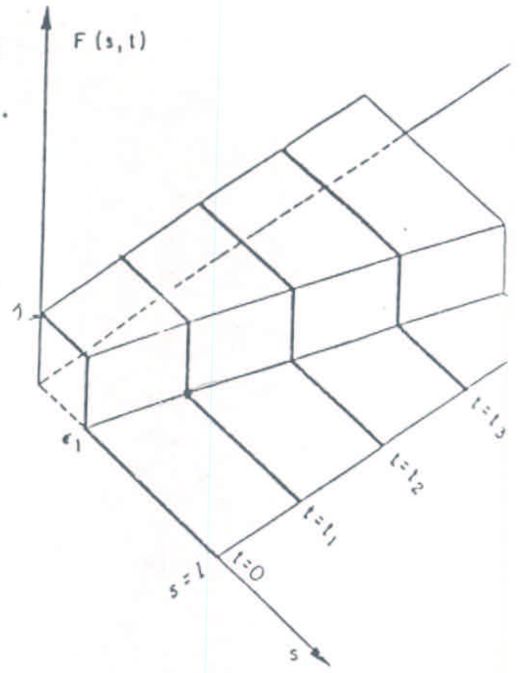


Fig 3.9.3 Perspectiva de la representación de F(s,t) en el triedro F, s,t.

En la figura 3.9.4 se presentan cuatro "fotografías" ideales de la tubería tomadas en los instantes $t=0$, $t=t_1$, $t=t_2$ y $t=t_3$. En estas "fotografías" ideales aparece la función $F(s,t)$. Como el lector puede constatarlo, en las "fotos" se observa que el escalón avanza hacia el extremo $s = \ell$ a una velocidad a. Conviene que el lector estudie con detenimiento las figuras precedentes pues en ellas se discuten los elementos esenciales del fenómeno ondulatorio, representado por una función del tipo $F(s-at)$.

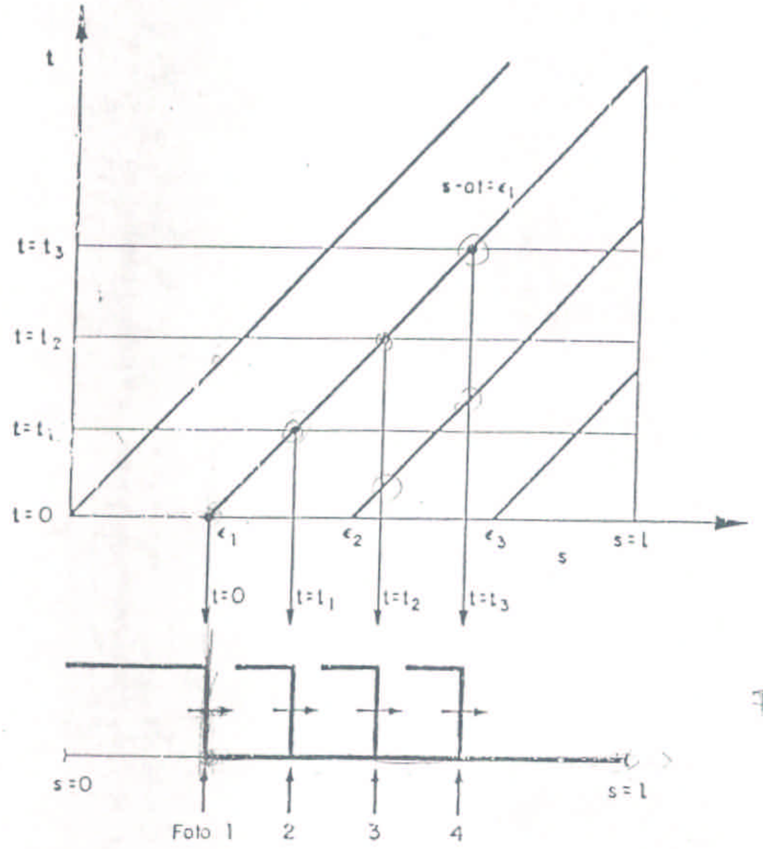


Fig 3.9.4 Avance de la onda F(s,t) en la tubería.

Sin embargo, en las soluciones (3.9.9) y (3.9.10) aparece la función $F(s-at)$ (cuyo comportamiento ya fue estudiado suponiendo que $F(s-at)$ fuese la función escalón) pero también aparece una función $G(s+at)$. Dicha función tiene un comportamiento similar a la función $F(s-at)$ con la única diferencia que en lugar de desplazarse la onda en el sentido de las s crecientes lo hace en el sentido contrario (hacia las s decrecientes).

La interpretación física de las constantes Q_o y h_o es sencilla. Son el gasto y la carga piezométrica en todo punto de la tubería, cuando no hay perturbaciones en el sistema ($F = G = 0$).

En consecuencia, en la tubería, para todo instante t, se tendrá una situación como la que se muestra en la figura 3.9.5. Podrán distinguirse dos ondas viajando una en la dirección del flujo (F) y otra en dirección opuesta (G). Para determinar $Q-Q_o$ en un punto de la tubería situada en $s=s_1$ y en el instante t_1, se realiza la suma del valor de las funciones F y G calculadas en $s=s_1$ y $t=t_1$

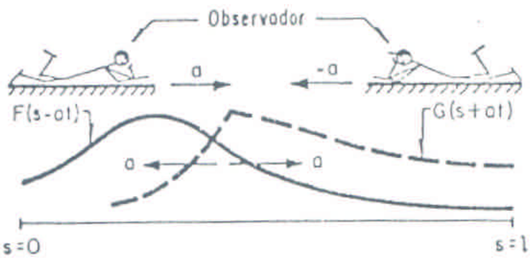


Fig 3.9.5 Movimiento de las ondas F y G en la tubería.

$$Q(s_1, t_1) - Q_o = F(s_1 - at_1) + G(s_1 + at_1) \qquad (3.9.12)$$

Para calcular $h - h_o$ se procede análogamente, de acuerdo con la ecuación (3.9.10):

$$h(s_1,t_1)-h_o=\frac{a}{gA}\left[F(s_1-at_1)-G(s_1+at_1)\right] \qquad (3.9.13)$$

Como el lector puede observar, el problema de describir el transitorio hidráulico (comportamiento del gasto Q y la carga piezométrica h) en el punto $s=s_1$ y para el instante $t=t_1$ está resuelto si se conoce el valor de F y G para ese punto en ese instante. Ahora bien, dichos valores de $F(s_1, t_1)$ y $G(s_1, t_1)$ en un instante anterior $t_0 < t_1$ correspondían a dos puntos de la tubería $s=s_o$ y $s=s_2$ con $s_o < s_1$ y $s_2 > s_1$ ubicados de tal forma que en $t=t_o$ se tiene la onda F pasando por $s=s_o$ con un valor

$$F(s_o, t_o) = F(s_1, t_1) \qquad (3.9.14)$$

por lo tanto $s_o = s_1 - a(t_1-t_o)$. Asimismo en $s=s_2$ para $t=t_o$, se tiene:

$$G(s_2, t_o) = G(s_1, t_1) \qquad (3.9.15)$$

por lo tanto $s_2=s_1+a(t_1-t_o)$.

En la figura 3.9.6 se representa en el diagrama s,t la localización de los puntos $P(s_1,t_1)$; $A(s_o,t_o)$ y $B(s_2,t_o)$.

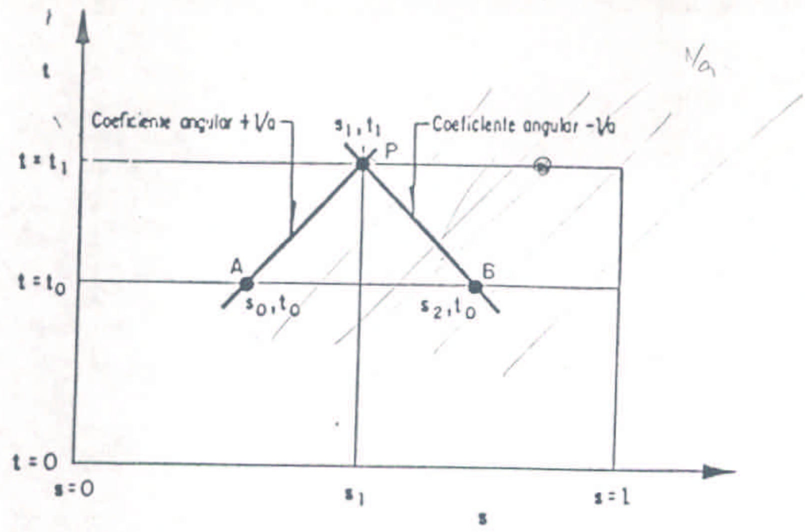


Fig 3.9.6 Cálculo exacto de Q y h en $P(s_1, t_1)$ conociendo Q y h en $A(s_0, t_0)$ y $B(s_2, t_0)$.

Obsérvese que la expresión (3.9.14) está indicando que la función F(s,t) se mantiene constante sobre las rectas de coeficiente angular + 1/a. Asimismo, la expresión (3.9.15) está indicando que la función G(s,t) se mantiene constante sobre las rectas de coeficiente angular −1/a. Recordando las expresiones (3.9.7) se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} F(s,t) &= \frac{1}{2}\left(Q + \frac{gA}{a}h\right) - C_1 \\ G(s,t) &= \frac{1}{2}\left(Q - \frac{gA}{a}h\right) - C_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.9.16)$$

Las rectas s=at+cte (coeficiente angular +1/a) representan un punto sobre la tubería que se mueve en el sentido del flujo con velocidad a. Por lo visto anteriormente F(s,t) es constante sobre esas rectas. Ello significa que si un observador se desplaza con el punto cuya velocidad es +a verá F=F(s), como una función independiente del tiempo (figura 3.9.5). Matemáticamente, la derivada total respecto a ese observador será

s−at = ε

$$\frac{dF(s,t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Q+\frac{gA}{a}h\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(Q+\frac{gA}{a}h\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(Q+\frac{gA}{a}h\right)\frac{ds}{dt}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{gA}{a}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s}a + gA\frac{\partial h}{\partial s}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,a\underbrace{\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{gA}{a^2}\frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial Q}{\partial t} + gA\frac{\partial h}{\partial s}\right)\right]}_{\text{sistema}} \quad (3.9.17)$$

donde ds/dt se tomó igual a la velocidad con que se desplaza el observador (+a).

Recordando las ecuaciones (3.9.1) es evidente que los dos sumandos del último término de (3.9.17) son nulos; por lo tanto

$$\frac{dF(s,t)}{dt} = 0 \qquad (3.9.18)$$

lo cual demuestra que para ese observador la función F(s,t) no depende del tiempo.

Naturalmente lo mismo se puede plantear para un observador que se desplace a la velocidad -a (en el sentido opuesto al flujo) respecto a las ondas G(s,t). En consecuencia el fenómeno ondulatorio en la tubería puede concebirse como dos desfiles de ondas uno en el sentido del flujo y con velocidad +a y el otro en el sentido opuesto al flujo y con velocidad -a. Un observador en reposo respecto a la tubería observa el desfile de las ondas según se ha descrito en la figura 3.9.4 para las ondas F(s,t). Para las ondas G(s,t) únicamente cambiará el sentido del movimiento. Un observador que se mueva con la velocidad +a, observará las ondas F como un integrante del desfile observa el grupo que desfila junto con él. Asimismo un observador que se mueva con la velocidad -a verá las ondas G(s,t) moviéndose junto con él.

El procedimiento descrito tiene gran importancia pues permite calcular Q y h en todo punto s de la tubería para un instante dado t_1 si se conoce Q y h en todo punto para un instante previo t_0. Un procedimiento análogo se verá más en detalle cuando se explique el llamado "método de las características" que se empleará para la solución del sistema de ecuaciones completo incluyendo la no linealidad que introduce la fricción.

3.9.3 Relación entre la perturbación del gasto y la perturbación de la carga piezométrica en una sección

De las relaciones (3.9.9) y (3.9.10) puede obtenerse una relación cuantitativa entre la perturbación del gasto y la perturbación de la carga piezométrica en una sección. En efecto, derivando (3.9.9) y (3.9.10) respecto al tiempo para s constante se obtiene:

en una sección

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dF}{d\varepsilon}\overset{\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}}{(-a)} + \frac{dG}{d\eta}\overset{\frac{\partial\eta}{\partial t}}{a} \qquad (3.9.19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{a}{gA}\left[\frac{dF}{d\varepsilon}(-a) - \frac{dG}{d\eta}a\right] \qquad (3.9.20)$$

Efectuando el cociente entre ambas expresiones y recordando que $\partial h/\partial t$ sobre $\partial Q/\partial t$ es igual a $\partial h/\partial Q$ se tiene que:

$$\left|\frac{\partial h}{\partial Q}\right| = \frac{a}{gA} \; \frac{\left|\dfrac{dG}{d\eta} + \dfrac{dF}{d\varepsilon}\right|}{\left|\dfrac{dG}{d\eta} - \dfrac{dF}{d\varepsilon}\right|} \qquad (3.9.21)$$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial v}\right| = \frac{a}{g} \simeq 100\ m/s$$

$$\underset{m/s}{\Delta v} \times 100 = \underset{m}{\Delta H}$$

Cuando una de las ondas predomina sobre la otra se tiene que:

una misma CD según esté A/B o aa genera ⊕ sobrepresión ⊖ depresión

$$\frac{\partial h}{\partial Q} = \pm \frac{a}{gA} \qquad (3.9.22)$$

La expresión (3.9.22) puede ponerse como el límite del cociente $\Delta h/\Delta Q$

$$\lim \frac{\Delta h}{\Delta Q} = \pm \frac{a}{gA} \qquad (3.9.23)$$

entendiéndose que Δh y ΔQ son los incrementos de h y Q en el tiempo para un mismo punto del sistema. Si en un punto determinado del sistema se consideran los valores de h y Q en dos instantes muy próximos de tiempo (3.9.23) puede escribirse como:

$$\Delta h = \pm \frac{a}{gA} \Delta Q \qquad (3.9.24)$$

cambios de Q provocan cambios de h

Esta ecuación está indicando que toda perturbación rápida ΔQ del gasto Q, que ocurra en un punto cualquiera del sistema, irá inexorablemente acompañada de una perturbación Δh de la carga piezométrica cuyo valor será a/gA veces el valor de la perturbación del gasto. Nótese pues que el factor a/gA posee un significado físico muy claro que caracteriza la conversión que se efectúa en la conducción, de perturbaciones de gasto a perturbaciones de presión y a la inversa. Usualmente, al término a/gA se le denomina "impedancia característica" de la conducción. o

depende de las características de la tubería

$$\frac{a}{gA} \cdot \Delta Q$$

Pulso de Joukowski

3.10 Condiciones de frontera

En esta sección se estudiarán las condiciones de frontera más frecuentes en la práctica y que, como ya se señaló, determinan junto con las condiciones iniciales la solución de las ecuaciones generales (3.8.8) y (3.8.9).

3.10.1 Tanque de nivel constante

Un tanque de nivel constante (figura 3.10.1) y área de superficie libre del orden del centenar de veces el área de la sección de la tubería, impone sobre

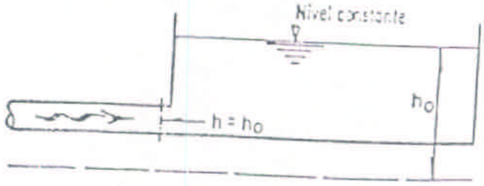


Fig 3.10.1 Condición de frontera impuesta por un tanque de nivel constante.

ésta una carga piezométrica constante. De forma que la condición de frontera es muy simple y se expresa como

$$h = h_o \quad \text{para todo} \quad t \qquad (3.10.1)$$

Se admite, naturalmente, que la presión sobre la superficie libre del agua es constante.

Es interesante examinar esta condición de frontera a partir de la ecuación (3.9.10) de $h-h_o$ en función de las ondas F y G. En efecto, imponiendo en $s=\ell$ (tanque de carga constante en el extremo de aguas abajo de la tubería) que $h=h_o$ se tiene:

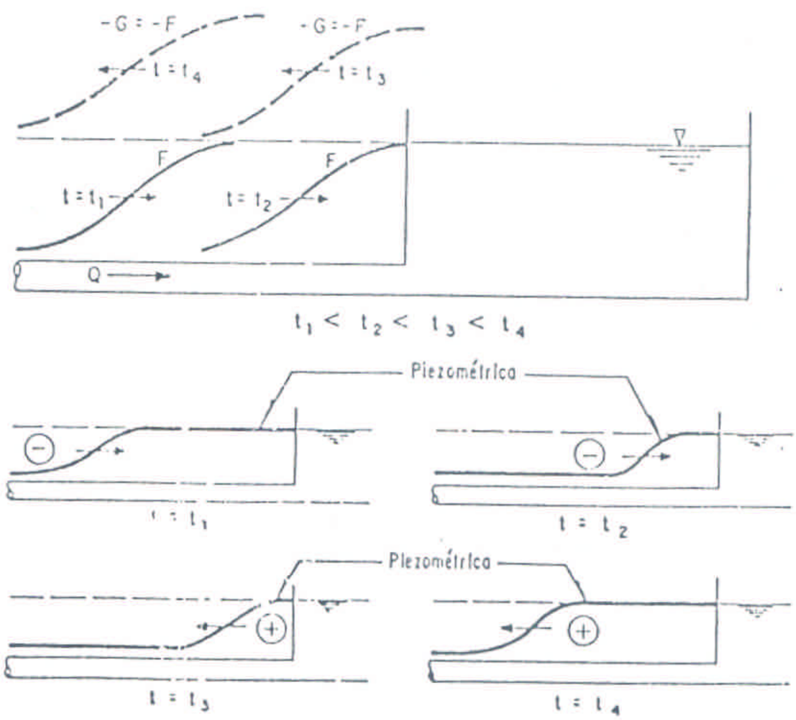
Pregunta ¿Sólo incide F y G?

$$0 = F(\ell - at) - G(\ell + at) \qquad (3.10.2)$$

o lo que es lo mismo:

$$G(\ell + at) = F(\ell - at) \qquad (3.10.3)$$

Ello implica que la onda reflejada $-G$ que viaja desde el tanque de carga constante en dirección opuesta al flujo y que sumada con la onda F da $h-h_o$ (onda resultante) en todo punto e instante, es igual a $-F$, siendo F la onda incidente sobre el tanque. El tanque oficia entonces como un espejo que refleja la onda incidente de carga piezométrica pero le cambia su signo. En la figura 3.10.2 se ilustra este fenómeno para cuatro instantes de tiempo sucesivos ($t_1 < t_2 < t_3 < t_4$). En la sección 3.11 se verán más detalles de este proceso de reflexión.



(+) Onda de sobrepresión

(−) Onda de depresión

Fig 3.10.2 Evolución de las ondas de carga piezométrica en el extremo de aguas abajo de una tubería conectada a un tanque de carga constante.

3.10.2 Tubería con el extremo cerrado

En un extremo cerrado (figura 3.10.3) la condición de frontera es obviamente

$$Q = 0 \qquad \text{para todo} \quad t \qquad (3.10.4)$$

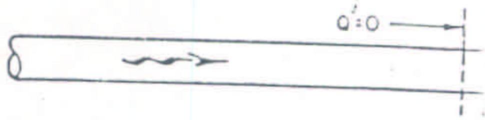


Fig 3.10.3 Condición de frontera impuesta por un extremo cerrado.

Procediendo igual que en el parágrafo anterior puede examinarse esta condición de frontera a partir de la ecuación (3.9.9) de $Q - Q_o$ en función de las ondas F y G. Imponiendo $Q = 0$ en $s = \ell$ y para todo t, se tiene que

$$0 = F(\ell - at) + G(\ell + at) \qquad (3.10.5)$$

En consecuencia

$$G(\ell + at) = - F(\ell - at) \qquad (3.10.6)$$ simetría central

Para calcular la presión se sustituye en la ecuación (3.9.10) y se obtiene que

$$h(\ell,t) - h_o = \frac{a}{gA} \cdot 2F(\ell - at) \qquad (3.10.7)$$

De (3.10.7) se concluye que la piezométrica en ℓ y para todo t duplica el valor de la onda incidente. En la figura 3.10.4 se presenta gráficamente este fenómeno. En la sección 3.11 se presentarán más detalles de este proceso de reflexión.

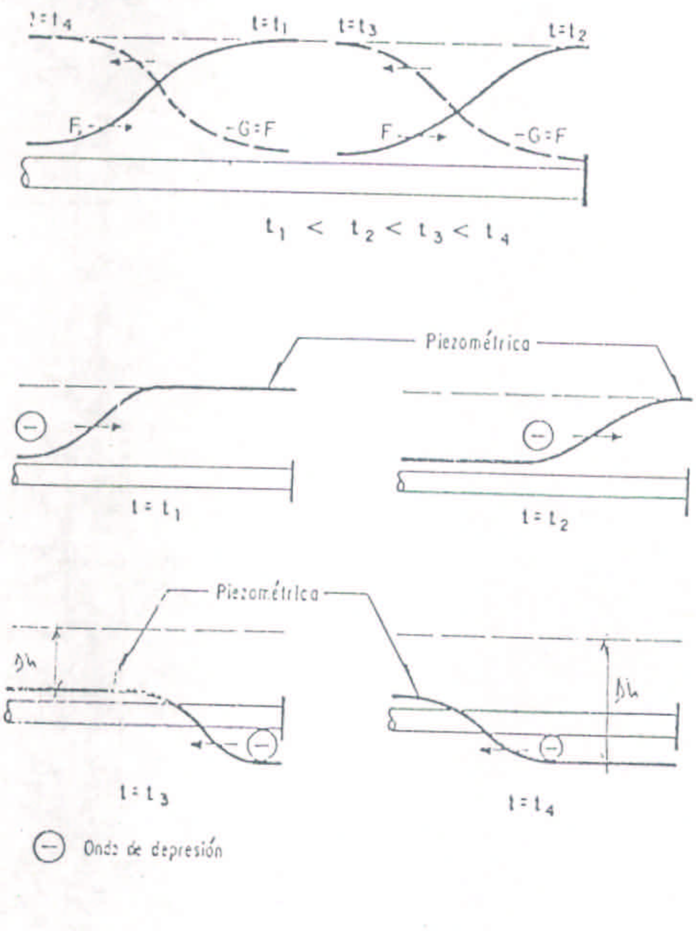


Fig 3.10.4 Evolución de las ondas de carga piezométrica en el extremo de aguas abajo de una tubería cuyo extremo está cerrado.

3.10.3 Orificio o válvula operada desde el exterior

La condición de frontera que impone un orificio o válvula operada desde el exterior es (figura 3.10.5):

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 = Q \\ Q &= C_q\, A\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \end{aligned}\right\}\text{para todo } t \qquad (3.10.8)$$

donde 1 indica el lado izquierdo de la singularidad y 2 el lado derecho, con el flujo en el sentido de izquierda a derecha. A es el área libre de pasaje y C_q el coeficiente de gasto. Si se trata de una válvula C_q A es variable con la posición del vástago de la válvula.

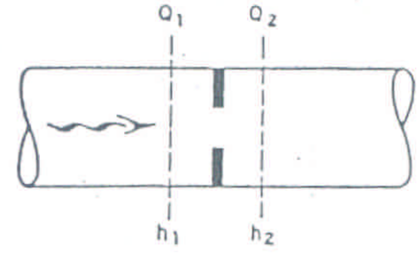


Fig 3.10.5 Condición de frontera impuesta por un orificio o válvula.

3.10.4 Válvula de retención

La válvula de retención (figura 3.10.6) es operada por el propio flujo y por lo tanto la condición de frontera que ella impone depende de la diferencia de cargas piezométricas a ambos lados de la válvula. A saber:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &\leq h_2 & Q &= 0 \\ h_1 &> h_2 & Q &= C_q A\sqrt{2g(h_1 - h_2)} \end{aligned}\right\} \qquad (3.10.9)$$

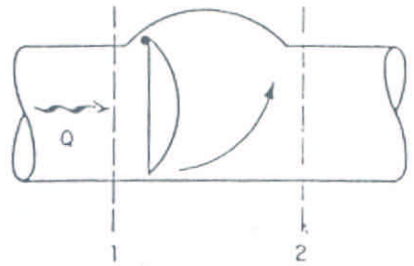


Fig 3.10.6 Condiciones de frontera impuesta por una válvula de retención.

Cuando se estudien en el fascículo IV algunos dispositivos de control de los transitorios hidráulicos como son los tanques de oscilación, los tanques unidireccionales, las cámaras de aire y las válvulas de alivio se estudiarán las condiciones de frontera que estos dispositivos imponen en las tuberías con las cuales se conectan.

3.11 Análisis de un ejemplo de propagación de perturbaciones en una tubería

En esta sección se realizará un análisis completo de un ejemplo muy simple de propagación de perturbaciones en una tubería sin fricción. El análisis estará basado en los elementos teóricos desarrollados en las secciones precedentes de este mismo capítulo. Se exhorta al lector a seguir con atención la exposición que se realizará pues en ella están contenidos los elementos esenciales del fenómeno de propagación de perturbaciones en una tubería. Un entendimiento cabal del fenómeno en su expresión más simple permitirá al lector abordar sin dificultades mayores los transitorios hidráulicos más complejos que se presentan en las instalaciones industriales.

3.11.1 Descripción de la instalación ideal

La instalación ideal que se empleará se presenta en la figura 3.11.1. Esta consiste en un tanque de nivel constante, una tubería uniforme de longitud ℓ, área de la sección recta A y celeridad a. En su extremo aguas abajo (2) posee una válvula capaz de imponer sobre la tubería un gasto variable linealmente en el tiempo desde Q_o el gasto de régimen, hasta Q=0. La ley de variación de gasto impuesta por la válvula en la sección 2 será entonces:

$$\left.\begin{aligned} Q_2 &= Q_o - \alpha t \qquad \text{para} \quad 0 \leq t < \frac{Q_o}{\alpha} \\ Q &= 0 \qquad\qquad \text{para} \quad \frac{Q_o}{\alpha} \leq t \end{aligned}\right\} \quad (3.11.1)$$

$\alpha = \left[\frac{s^2}{m^3}\right]$

El intervalo de tiempo Q_o/α se denominará tiempo de cierre T_c.

$\frac{m^3}{s} \cdot \frac{s^2}{m^3} = s$

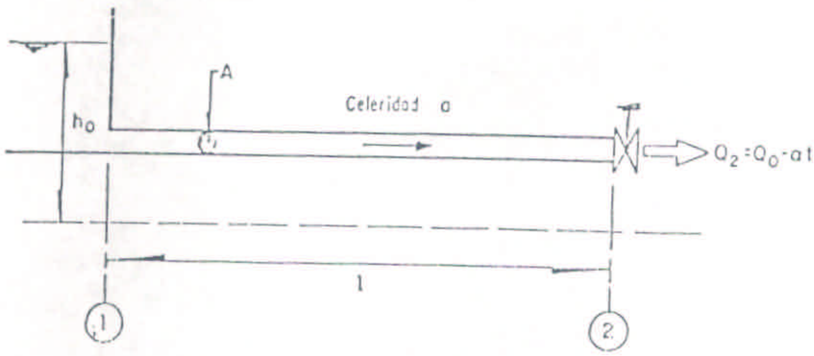


Fig 3.11.1 Esquema de la instalación.

3.11.2 Análisis general de la propagación de las ondas de carga piezométrica

Al comenzar el cierre de la válvula, en Δt se producirá una perturbación en el gasto $\Delta Q = -\alpha\Delta t$ y se originará una onda G que se desplazará aguas arriba a la velocidad a. Dicha perturbación en el gasto irá inexorablemente acompañada de una perturbación en la carga piezométrica cuya magnitud será $\Delta h = -a/gA \cdot \Delta Q = (a\alpha/gA)\Delta t$, según se explicó en 3.9.3. Esta perturbación de carga viajará hacia el extremo de aguas arriba a una velocidad a, llegando a él en el tiempo ℓ/a. En dicho extremo se reflejará como una perturbación de signo contrario $-\Delta h$ según lo visto en 3.10.1 y viajará en la dirección de aguas abajo, llegando a la válvula $2\ell/a$ segundos después de haber partido. Dicho intervalo de tiempo $T = 2\ell/a$ se denomina "periodo propio" de la tubería. Es claro que si el tiempo de cierre de la válvula T_c es menor que T ($T_c < T$) al llegar a la válvula la onda reflejada por el

→ sobrepresión

$\Delta h = -\frac{a}{gA} \cdot \Delta Q$ < 0

> 0

por eso el - adelante de la fórmula.

$\Delta h = \frac{a\alpha}{gA}$

tanque de carga constante, se encontrará con la válvula cerrada. Si T_c es mayor que T ($T_c > T$) la onda al llegar a la válvula se encontrará con la válvula abierta y afectará al incremento de presión que se está generando en la válvula en el instante $t = T$. Este análisis elemental lleva a agrupar en dos clases los cierres de válvulas y en general los fenómenos que ocurren en las fronteras de una tubería y son la causa del transitorio hidráulico. Estas clases son:

$$\left.\begin{array}{l} T_c \leq T \text{ - fenómeno rápido} \\ \\ T_c > T \text{ - fenómeno lento} \end{array}\right\} \qquad (3.11.2)$$

Para facilitar el análisis se procederá primero a estudiar en detalle un fenómeno rápido en la instalación presentada en la figura 3.11.1.

3.11.3 Análisis de un fenómeno rápido (cierre rápido)

En el caso particular analizado el fenómeno consiste en un cierre rápido. El lector comprenderá que la clase de fenómenos rápidos contiene todos los fenómenos que perturban el flujo cuya duración completa es menor que T. Estos fenómenos incluyen también las aperturas rápidas.

Para que se cumpla que $T_c < T$ deberá verificarse que:

$$\frac{Q_o}{\alpha} < \frac{2\ell}{a} \quad \text{(cierre rápido)} \qquad (3.11.3)$$

donde $Q_o/\alpha = T_c$ según se estableció en (3.11.1) y $2\ell/a = T$. La desigualdad (3.11.3) indica que si $\alpha > Q_o a/2\ell$ el cierre será rápido. Dicho cierre producirá una perturbación de gasto

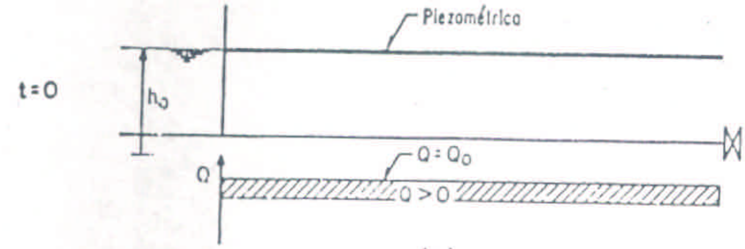
$$\Delta Q = - Q_o \qquad (3.11.4)$$

y una perturbación de carga piezométrica

$$\Delta h = \frac{Q_o a}{gA} \qquad (3.11.5)$$

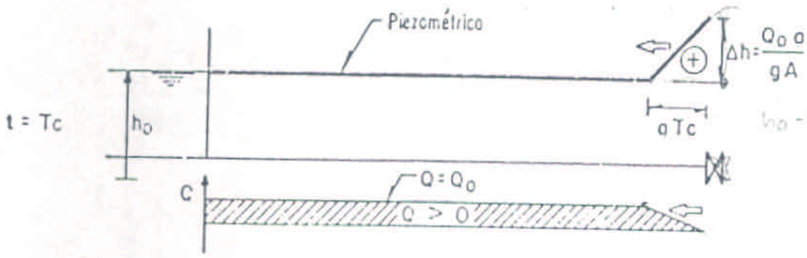
En las figuras 3.11.2 (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n) se muestran diferentes estados del fenómeno de propagación de una onda de presión del tipo escalón pero con pendiente gA/α (recordar que el gasto se reduce en forma lineal con el tiempo).

La serie de figuras 3.11.2 (a - n) es clásica. En ella se muestran los estados sucesivos por los cuales la tubería pasa cíclicamente pues, al no haber fricción, no habrá atenuación de las ondas en el tiempo. A continuación se examinarán algunos aspectos de interés del fenómeno precedente.



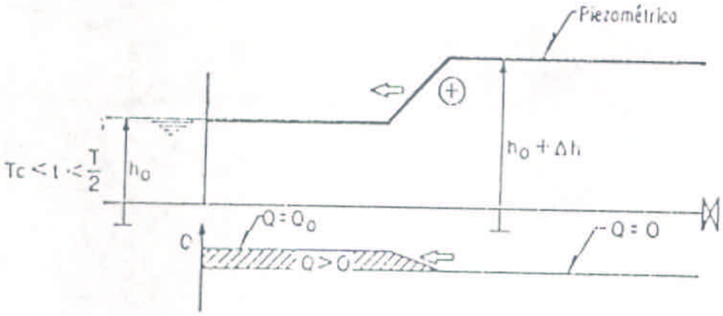
(a)

Flujo estacionario. Comienza a formarse la onda de sobrepresión.



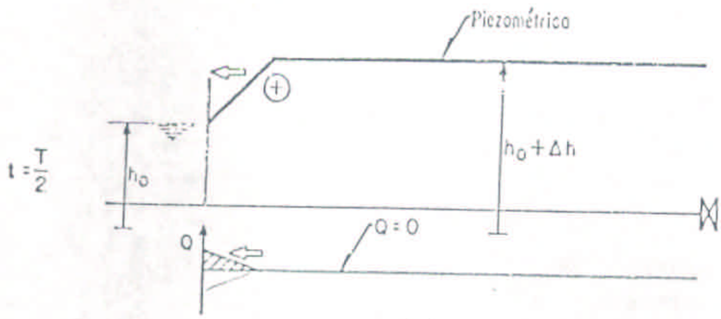
(b)

Se forma la onda de sobrepresión.



(c)

La onda viaja hacia el tanque de carga constante.

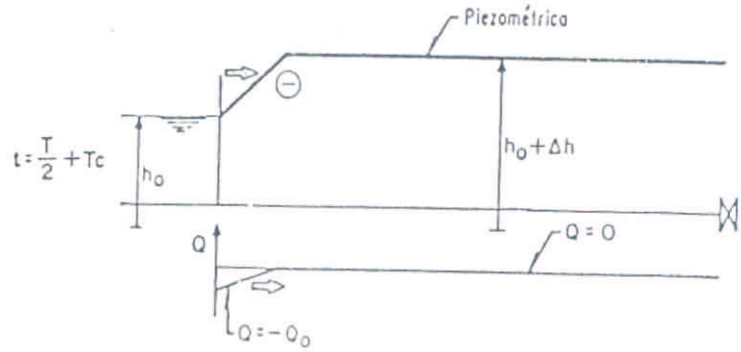


(d)

La onda llega al tanque de carga constante. Comienza la reflexión de la onda opuesta (⊕ → ○) en el tanque.

$Q - Q_0 = G$

$0 \Rightarrow \boxed{G = -Q_0}$



(e)

Finaliza la reflexión en el tanque. La onda de depresión parte hacia la válvula.

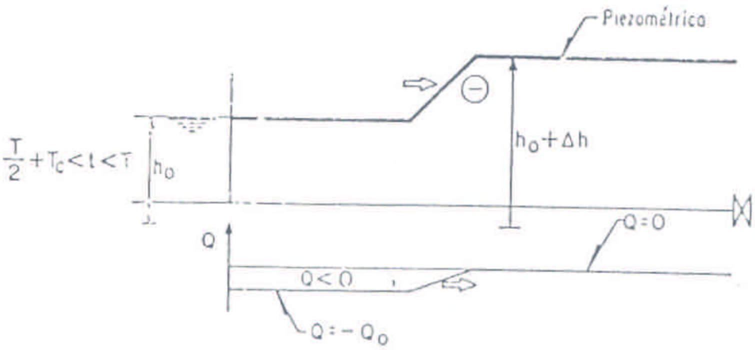
Tanque

$$h - h_0 = \frac{a}{gA}(F - G)$$

$\shortparallel$ 0 $\qquad$ $\shortparallel$ $-Q_0$

$\boxed{F = -Q_0}$

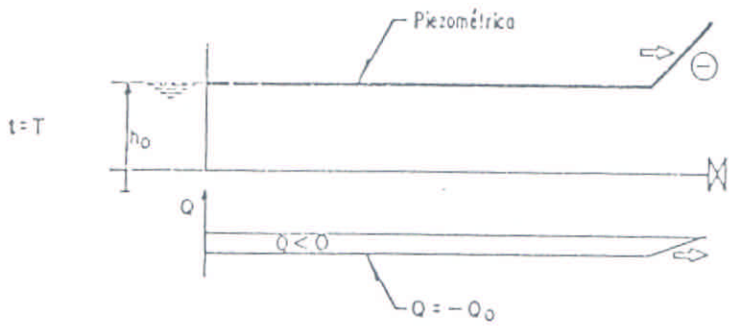
$\boxed{G = -Q_0}$



(f)

La onda de depresión viaja hacia la válvula.

llega a la válvula :



(g)

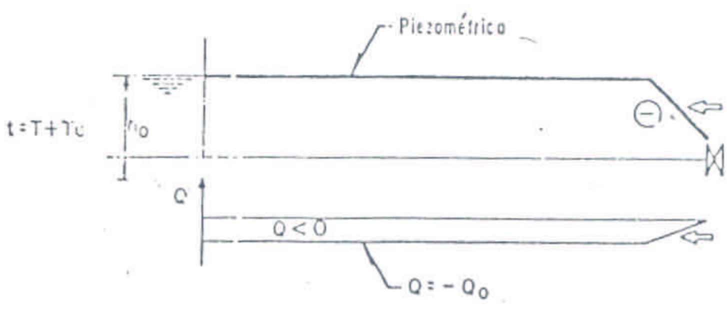
La onda de depresión llega a la válvula T segundos después del comienzo del fenómeno. Comienza la reflexión de la misma onda (⊖→⊖) en la válvula cerrada.

llega a la válvula

$$Q - Q_0 = F + G$$

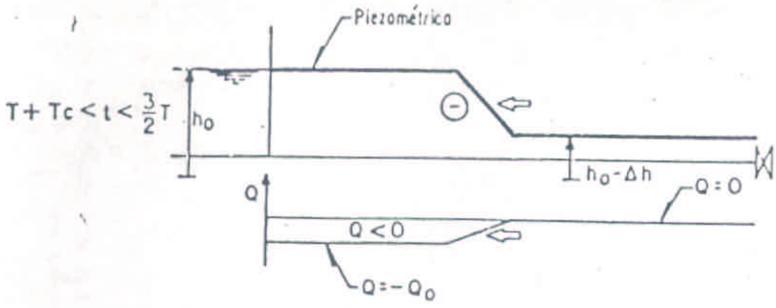
$\shortparallel$ 0 $\qquad$ $-Q_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} G = 0 \\ F = -Q_0 \end{array}}$$



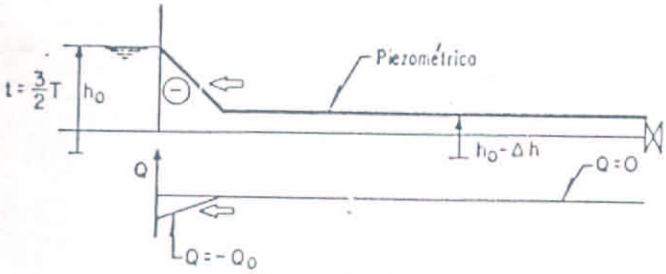
(h)

Finaliza la reflexión en la válvula. La onda de depresión parte hacia el tanque.



(i)

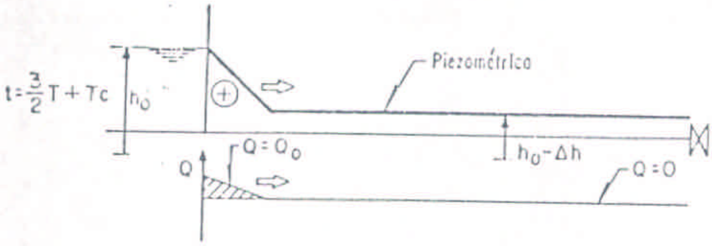
La onda de depresión viaja hacia el tanque.



(j)

Tanque

La onda de depresión llega al tanque. Comienza la reflexión de la onda opuesta (⊖→⊕) en el tanque.

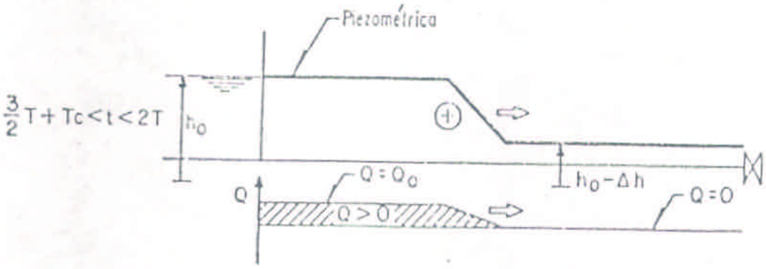


(k)

Tanque

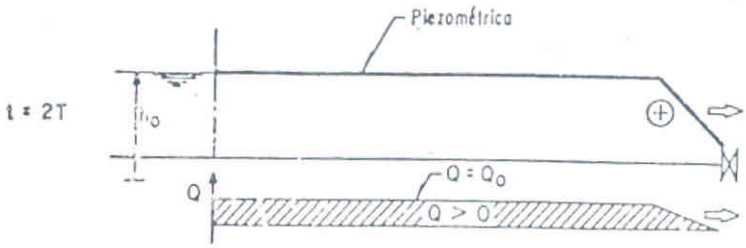
F=0

Finaliza la reflexión en el tanque. La onda de sobrepresión parte hacia la válvula.



(l)

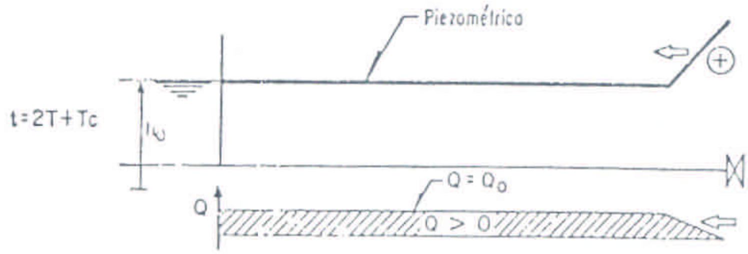
La onda de sobrepresión viaja hacia la válvula.



(m)

La onda de sobrepresión llega a la válvula 2T segundos después del comienzo del fenómeno.

Restablezco el estado de régimen
$\xi=0$, $F=0$



(n)

Todo vuelve a empezar.

Se forma nuevamente la onda de sobrepresión. Este estado es igual al de la figura 3.11.2 (b). El ciclo comienza a repetirse

Fig 3.11.2 Diferentes estados del fenómeno de propagación de una onda de presión.

Forma de la onda

La forma de la onda tiene que ver con la ley Q_2 (t). En el caso examinado se adoptó una ley lineal $Q_2 = Q_o - \alpha t$. Como consecuencia de esta ley resulta de (3.9.9) la siguiente función G:

$$Q(\ell,t)-Q_o=G(\ell+at)=\begin{Bmatrix} -\alpha t & , & o \leq t < T_c \\ -Q_o & , & T_c \leq t \end{Bmatrix} \quad (3.11.6)$$

lo cual a su vez determina la siguiente $h(\ell, t)$

$$h(\ell,t)-h_o=-\frac{a}{gA}G(\ell+at) = \begin{Bmatrix} \dfrac{a\alpha}{gA}\, t & , & o \leq t < T_c \\ \\ \dfrac{aQ_o}{gA} & , & T_c \leq t \end{Bmatrix} \quad (3.11.7)$$

Esta función $h(\ell,t)$ crece de h_o a $h_{max} = h_o + aQ_o/gA$ durante el intervalo T_c. Siendo $T_c = Q_o/\alpha$, la pendiente $(h_{max} - h_o)/T_c = \alpha a/gA$ es proporcional al coeficiente α. Cuando $\alpha \to +\infty$ la forma de la onda tiende a la función escalón (escalón recto), según se muestra en la figura 3.11.3. Nótese que siendo $T_c < T$ (cierre rápido) el incremento $h_{max} - h_o = \Delta h$ no se altera con α. α influye en la forma de la onda pero no en Δh.

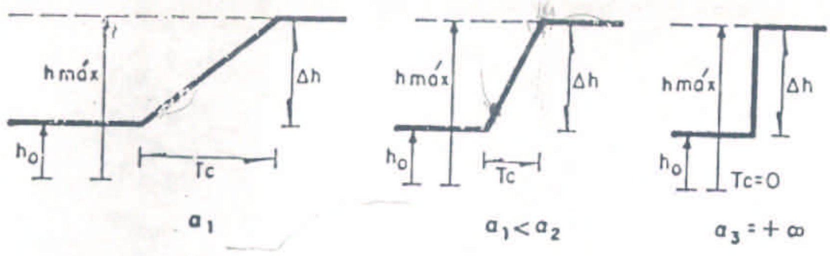


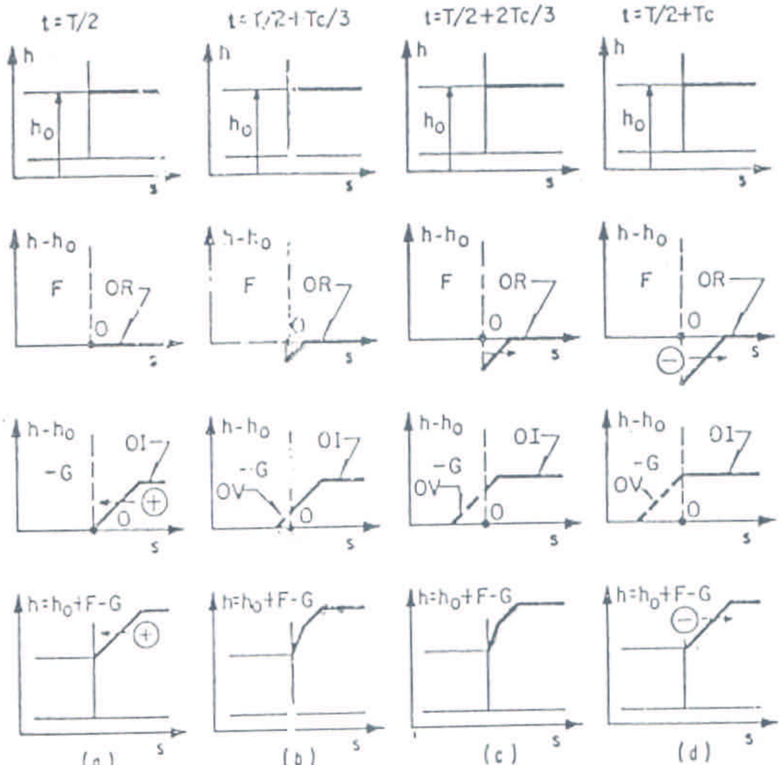
Fig 3.11.3 Variación de la forma de la onda con α.

Reflexión en un tanque de carga constante

En la sucesión de figuras 3.11.2 no se detallan los procesos de reflexión de las ondas de carga piezométrica y de gasto. Por ejemplo en la figura (d) ($t = T/2$) se tiene la onda llegando al tanque de carga constante y en la (e) ($t = T/2 + T_c$) el proceso de reflexión ya se produjo pues aparece completa la onda reflejada. Como el proceso de reflexión posee una gran importancia técnica interesa que el lector lo comprenda en detalle. Para ello se han elaborado las figuras 3.11.4 y 3.11.5. En estas figuras se presenta la reflexión de la onda de carga (figura 3.11.4) y de gasto (figura 3.11.5) en un tanque de carga constante. Las figuras están organizadas en 4 columnas, cada columna corresponde a un instante determinado del proceso de reflexión. La primera corresponde al momento que llega la onda de sobrepresión y la última cuando sale la onda de depresión. Las dos intermedias difieren en $T_c/3$ y $2\ T_c/3$ segundos de la primera. En cada columna se presentan cuatro figuras que corresponden cada una, a la distribución según s de cada uno de los términos que componen las ecuaciones (3.9.9) y (3.9.10) que definen Q y h en función de s y t. La figura inferior en cada columna es la figura que resulta sumando los tres términos que se dibujan en las tres figuras superiores de cada columna.

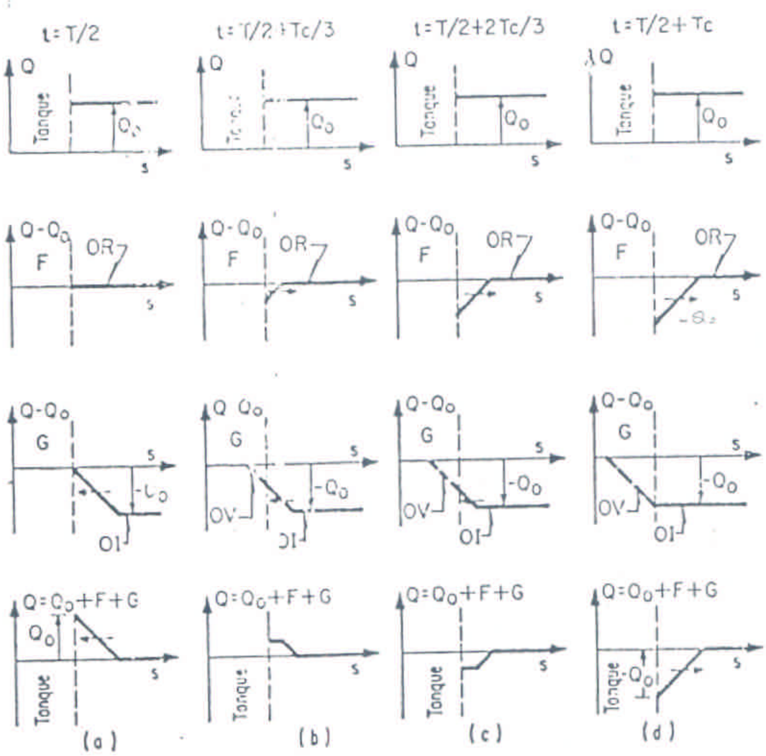
Obsérvese como para las cargas piezométricas la onda reflejada F (columna d) es igual y opuesta a la onda incidente -G (columna a). Nótese que la onda F se halla girando 180° alrededor del punto O la onda virtual (OV)(columna d).

Obsérvese que para los gastos las ondas F y G son iguales a las que intervienen en la carga piezométrica, aunque varía el signo de G. El resultado obtenido es completamente diferente que el obtenido para las cargas puesto que en este caso la onda reflejada F (columna d) es igual a la onda incidente G (columna a). Nótese que la onda F se halla haciendo una simetría, respecto del eje que indica la presencia del tanque, de la onda virtual (columna d).



OI – onda incidente, OR – onda reflejada, OV – onda virtual, ⊕- sobrepresión, ⊖- depresión
La OR se obtiene girando a 180° la OV respecto al punto O

Fig 3.11.4 Detalle de la reflexión de una onda de carga piezométrica en un tanque de carga constante.



OI – onda incidente, OR – onda reflejada, OV – onda virtual. La OR se obtiene por simetría axial de la OV respecto al eje que indica la presencia del tanque

Fig 3.11.5 Detalle de la reflexión de una onda de gasto en un tanque de carga constante.

Mecanismo físico que explica la reflexión observada en un tanque de carga constante

Si bien los fenómenos de reflexión expuestos han sido analizados teóricamente anteriormente, es interesante examinar con detalle el mecanismo físico que está detrás de los mismos.

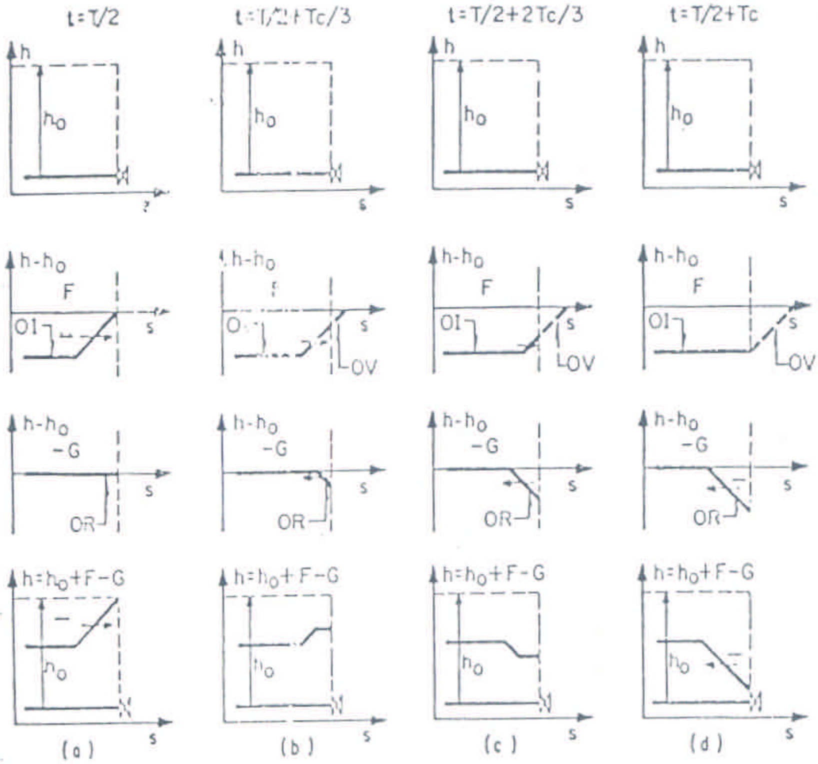
Para ello se requiere observar lo que ocurre con el gasto en el extremo de la tubería que se estudia. En las figuras 3.11.2 (c) (d) (e) y (f) se observa el comportamiento del gasto en la proximidad del extremo donde se halla el tanque de carga constante. En la figura (c) el gasto es Q_o del tanque a la tubería pues aún no llegó la perturbación producida por la válvula. En la figura (d) el gasto Q_o comienza a reducirse (figuras 3.11.5 (b) y (c)) pues la presión en la proximidad de la tubería comienza a incrementarse según se detalló en las figuras 3.11.4 (b) y (c). Siendo mayor la presión en la tubería que en el tanque, el gasto se invierte y pasa de + Q_o en 3.11.2 (c) a - Q_o en 3.11.2 (f). Este gasto invertido permite reducir la presión de la tubería para igualarla con la del tanque. En la figura 3.11.2 (f) se observa como la tubería, con sobrepresión respecto al tanque, expulsa el gasto - Q_o hacia el tanque y reduce su presión a la del tanque. La reducción de presión que sufre la tubería debido a la expulsión del gasto - Q_o implica que por la tubería se propague una onda de depresión desde el tanque a la válvula. Por ello el tanque actúa como un reflector que invierte el signo de la onda de presión que llega hasta él.

Mecanismo físico que explica la reflexión observada en un extremo cerrado

El comentario explicativo realizado para la reflexión de las ondas en un tanque de carga constante, vale también para este caso. Las figuras correspondientes son las figuras 3.11.6 y 3.11.7. En este caso es de interés observar, para las cargas piezométricas, como la onda reflejada -G (columna d) es igual a la onda incidente F (columna a). La reflejada se obtiene de la onda virtual por simetría axial respecto al eje que indica la presencia del extremo cerrado. Para el gasto, el comportamiento del extremo cerrado es análogo al comportamiento del tanque de carga constante para la carga piezométrica. La onda reflejada G (columna d) se obtiene por giro de 180° de la onda virtual.

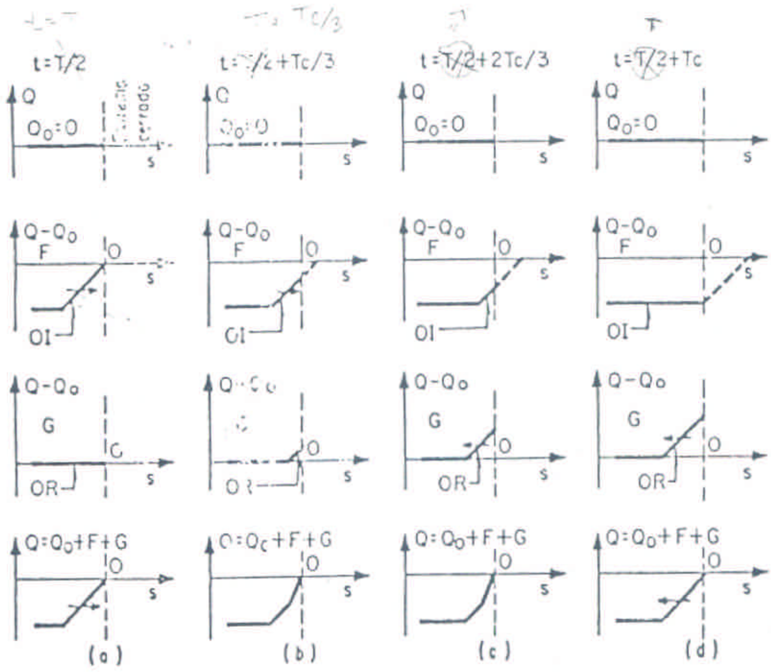
La onda reflejada G es igual y opuesta a la incidente F (columna a).

Se exhorta al lector a reflexionar sobre los mecanismos físicos que producen los comportamientos descritos como se hizo anteriormente con el tanque de carga constante.



OI – onda incidente, OR – onda reflejada, OV – onda virtual, ⊕ – sobrepresión, ⊖ – depresión
La OR se obtiene por simetría axial de la OV respecto al eje que indica la presencia del extremo cerrado.

Fig 3.11.6 *Detalle de la reflexión de una onda de carga piezométrica en un extremo cerrado.*

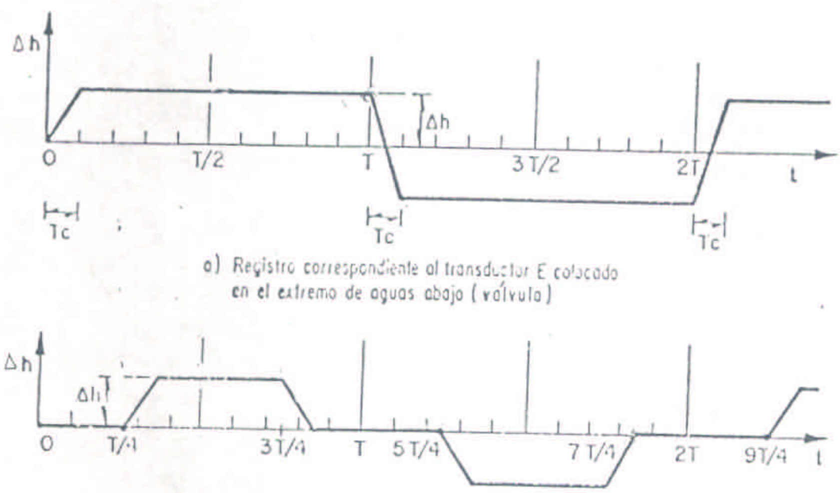


OI – onda incidente, OR – onda reflejada, OV – onda virtual
La OR se obtiene girando la OV 180° respecto al punto O

Fig 3.11.7 *Detalle de la reflexión de una onda de gasto.*

Evolución en el tiempo de las cargas piezométricas en diferentes puntos de la tubería

El estudio experimental de los transitorios hidráulicos se realiza mediante medición de las presiones instantáneas en diferentes puntos de la tubería. Para ello debe contarse con transductores de presión sin retardo y un registrador sin inercia. Con estos elementos el ingeniero obtendrá registros donde se consigna la evolución en el tiempo de las presiones o lo que es lo mismo, de las cargas piezométricas pues en $h = p/\gamma_0 + z$ el único término que depende del tiempo es p. Para cada punto de medición se obtendrá un registro y con la interpretación de estos registros se podrán conocer los fenómenos que ocurrieron dentro de la tubería durante el transitorio. En la figura 3.11.8 se muestra el aspecto de los registros que se obtendrían si se colocaran dos transductores de presión en la instalación descrita en la figura 3.11.1. Los transductores se ubican en el extremo donde se halla la válvula (transductor E) y en el punto medio (transductor M). La forma de los registros puede confrontarse con la evolución de las cargas piezométricas en la figura 3.11.2.



a) Registro correspondiente al transductor E colocado en el extremo de aguas abajo (válvula)

b) Registro del transductor M colocado en el punto medio de la tubería

Fig 3.11.8 *Evolución en el tiempo de las cargas piezométricas en dos puntos de la tubería*

3.11.4 Análisis de un fenómeno lento

Según se vió en 3.11.2 los fenómenos que producen el transitorio hidráulico se pueden agrupar en dos clases. La clase de los fenómenos rápidos agrupa aquellos fenómenos de perturbación cuya duración T_c es menor que el tiempo T de ida y regreso de la onda hasta el otro extremo de la tubería ($T = 2\ell/a$). Estos fenómenos se estudiaron en 3.11.3. Ahora se examinarán los fenómenos lentos ($T_c > T$). Como se señaló, estos fenómenos son más complicados de ser abordados por medio de un análisis elemental puesto que la onda reflejada en el extremo opuesto al que se perturba, interfiere con la propia perturbación para $t > T_c$.

$t < T_c$

En lo que sigue se examinará un fenómeno lento de cierre de la válvula en $T_c > T$ para la instalación propuesta en la figura 3.11.1. Se seguirá admitiendo, para simplificar el análisis, que el cierre produce una variación lineal de gasto según se describió en (3.11.1). Para que el cierre sea lento se deberá cumplir como se indicó en (3.11.2) que $T_c = Q_o/\alpha > T$.

El cierre lento puede concebirse como una sucesión de cierres rápidos que distan ΔT_c entre sí, tal como se indica en la figura 3.11.9 (a) para el gasto y (b) para la carga piezométrica. En la figura se tomó ΔT_c de tal forma que $4\Delta T_c = T$. Nótese que a cada cierre rápido corresponde un incremento de carga Δh. Para los cuatro incrementos que ocurren en el intervalo $0 - T$ se tendrá un incremento de la carga piezométrica en la válvula de $4\Delta h$. Siendo $\Delta h = \Delta Q\ a/gA = \alpha\Delta T_c\ a/gA$ el incremento $4\Delta h$ será igual a:

$$4\ \alpha\ \Delta T_c\ \frac{a}{gA} = \alpha\frac{Ta}{gA} \qquad (3.11.8)$$

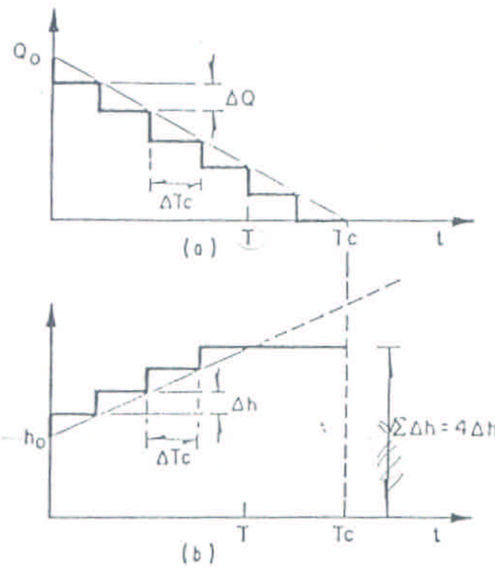


Fig 3.11.9 Cierre lento como sucesión de cierres rápidos.

Ahora bien, para $t = T$ comienza a llegar la onda de carga reflejada por el tanque de carga constante correspondiente al primer cierre rápido. Dicha onda de carga, como se vió anteriormente, es de igual magnitud y opuesta en signo. Vale pues $-\Delta h$. En consecuencia para $T < t < T_c$ la carga piezométrica en la válvula no puede aumentar más puesto que cada nuevo Δh producido por cada nuevo cierre rápido es anulado por el $-\Delta h$ que llega desde el tanque. En consecuencia, el máximo incremento de carga piezométrica que puede registrarse en el extremo de aguas abajo de la tubería será:

$$\Sigma\ \Delta h = \alpha\ \frac{Ta}{gA} \qquad \text{para} \qquad T_c > T \qquad (3.11.9)$$

Recordando que $T = 2\ell/a$, sustituyendo en (3.11.9) se tiene que para el cierre lento el máximo incremento de carga será:

$$\Sigma\ \Delta h = \alpha\ \frac{2\ell}{gA} \qquad \text{para} \qquad T_c > T \qquad (3.11.10)$$

En consecuencia, el máximo incremento de carga tenderá a cero si $\alpha \to 0$ (cierres muy lentos). Por otra parte recordando que $T_c = Q_o/\alpha$, si $T_c = T$ resulta $\alpha = Q_o/T = Q_o a/2\ell$. Sustituyendo en (3.11.10) se tiene que $\Sigma\Delta h = Q_o a/gA$

que de acuerdo con (3.11.5) es el incremento de carga correspondiente al cierre rápido. En consecuencia; el incremento máximo de carga piezométrica en el extremo de aguas abajo (Δh_{max}) tiene la representación gráfica, en función de α, que se muestra en la figura 3.11.10.

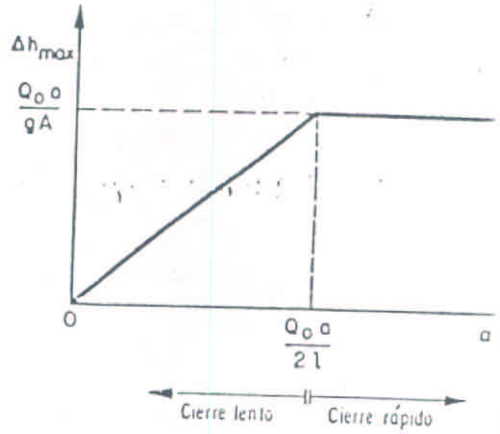


Fig 3.11.10 Incremento máximo de la carga piezométrica en función de la velocidad del cierre.

El resultado obtenido muestra la importancia que posee el tiempo de cierre en el incremento de carga piezométrica en la conducción. Como el lector verá posteriormente en el fascículo IV, este hecho será tenido particularmente en cuenta en la elección y localización de los dispositivos de control de transitorios en las conducciones de agua.

3.12 Criterio para determinar el modelo a emplear

En este fascículo se han desarrollado dos modelos para el estudio del flujo no estacionario. El primero desarrollado en el capítulo 2 admite que la celeridad en la propagación de las perturbaciones es infinita ($a = \infty$), el segundo desarrollado en el capítulo 3 se basa en la existencia de una celeridad a finita. En esta sección se presentará un criterio para que el lector tenga elementos para decidir respecto al empleo de uno u otro modelo en cada caso particular.

El criterio consiste en la comparación entre el tiempo T_1 en el cual se produce el fenómeno que motiva el transitorio hidráulico (cierre o apertura de una válvula, paro o arranque de una bomba etc.) y el tiempo que una onda tarda en recorrer la tubería y regresar al punto donde se generó la perturbación.

El tiempo T_1 se medirá a partir de la derivada del gasto cuya variación produce el golpe de ariete. Sea Q_0 el gasto de régimen del sistema hidráulico, T_1 se definirá como:

$$T_1 = Q_0 \frac{1}{\left|\frac{\partial Q}{\partial t}\right|} \qquad (3.12.1)$$

donde $|\partial Q/\partial t|$ debe ser el valor máximo que toma $|\partial Q/\partial t|$ en el fenómeno real. Por otro lado este valor de T_1 debe ser comparado con el tiempo T_2 en que una onda tarda en ir y volver por la tubería hasta el punto de partida.

Dicho tiempo se calcula como se indica:

$$T_2 = \frac{2\ell}{a} \qquad (3.12.2)$$

siendo ℓ la longitud de la conducción.

El criterio que se propone se basa en la evaluación del parámetro T_2/T_1. De acuerdo con el valor que tome el cociente T_2/T_1 podrá afirmarse si es razonable emplear el modelo con ondas o por el contrario conviene trabajar con el modelo con $a = \infty$ (oscilación de masa). En la tabla 3.12.1 se resume el criterio.

Tabla 3.12.1 Resumen del criterio para decidir sobre el modelo a emplear.

Relación T_2/T_1	Modelo a emplear
1) $\frac{T_2}{T_1} \ll 1$	Modelo de oscilación de masa (a infinita)
2) Si no se verifica 1)	Modelo de ondas (a finita)

Naturalmente no es fácil precisar en general el significado de $T_2/T_1 \ll 1$. En principio debe entenderse que cuanto menor sea dicho cociente más representativo del fenómeno real será el modelo de oscilación de masa ($a = \infty$).

El modelo de ondas (a finita) considera también la inercia de la columna líquida. Es pues un modelo más completo ya que cuando $T_2/T_1 \ll 1$ el modelo de ondas tiende al de oscilación de masa, sin embargo cuando existe seguridad de que el modelo de oscilación de masa (a infinita) da buenos resultados, su simplicidad, comparado con el modelo de ondas, hace deseable su empleo.

Para que el lector adquiera mayor familiaridad con el comportamiento de ambos modelos en lo que sigue se analizará un sistema muy simple sometiéndolo a $\partial Q/\partial t$ crecientes manteniendo Q_o constante. Ello implica, de acuerdo con (3.12.1), T_1 decrecientes. La longitud ℓ de la conducción y la celeridad se mantendrán constantes y se admitirá que no hay fricción. En consecuencia T_2 (3.12.2) se mantendrá constante.

El sistema a analizar es el presentado en la figura 3.11.1. En dicho sistema se suponía que la válvula en el extremo de la tubería actuaba de forma de reducir el gasto Q de acuerdo con la ley $Q = Q_o - \alpha t$, siendo α una constante. En consecuencia $|\partial Q/\partial t| = \alpha$. Para comparar los modelos se calculará con cada uno de ellos el máximo incremento de carga piezométrica (Δh_{max}) en un punto ubicado inmediatamente aguas arriba de la válvula. Dicho cálculo ya fue realizado para el modelo con ondas (a finita) en la subsección 3.11.4 (Análisis de un fenómeno lento). Acá se calculará Δh_{max} para el modelo de oscilación de masa (a infinita).

Para realizar el cálculo se empleará la ecuación (2.6.3) con f = 0. En el sistema considerado se tiene una tubería de área A constante. En consecuencia $V = Q/A$. Por lo tanto V no depende de s. Aplicando (2.6.3) se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{gA}\frac{dQ}{dt} \qquad (3.12.3)$$

Integrando en s, resulta:

$$h_2 - h_r = -\frac{\ell}{gA}\frac{dQ}{dt} \qquad (3.12.4)$$

Como la válvula impone $dQ/dt = -\alpha$ de acuerdo con lo ya dicho, se tendrá que:

$$h_2 - h_o = \frac{\ell\alpha}{gA} \qquad (3.12.5)$$

En la figura 3.12.1 se presenta el incremento (3.12.5) calculado mediante el modelo con a infinita, superpuesto al resultado ya presentado en la figura 3.11.10 para el modelo con a finita. En las abscisas se emplea $T_2/T_1 = 2\ell\alpha/aQ_o$. En dicha figura se observa que para $T_2/T_1 < 2$ se obtienen incrementos mayores con el modelo con a finita y para $T_2/T_1 > 2$ sucede lo contrario. Para $T_2/T_1 < 1$, el modelo con a finita da, para este ejemplo, exactamente el doble que el modelo con a infinita.

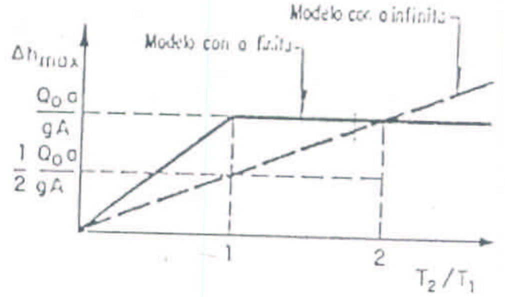


Fig 3.12.1 *Comparación de los resultados obtenidos con ambos modelos.*

Si se toma como referencia de cotas el punto más bajo del sistema, h_o puede servir para evaluar Δh_{max} como fracción de h_o. Para determinar el T_2/T_1 máximo con el cual puede emplearse el modelo con a infinita, cometiendo un error menor que ε en cuanto al $\Delta h_{max}/h_o$ a estimar, debe calcularse para que T_2/T_1 se verifica que:

$$\frac{(\Delta h_{max})_a - (\Delta h_{max})_{a=\infty}}{h_o} = \varepsilon \qquad (3.12.6)$$

Siendo $(\Delta h_{max})_a = 2\,(\Delta h_{max})_{a=\infty}$ de (3.12.6) resulta que:

$$(\Delta h_{max})_{a=\infty} = \varepsilon h_o \qquad (3.12.7)$$

$T_1 = \frac{Q_o}{\alpha}$ $\quad T_2 = \frac{2\ell}{a}$ $\quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\ell}{a}$

Siendo $(\Delta h_{max})_{a=\infty} = \ell\alpha/gA$ y $\alpha = T_2 a\, Q_o/T_1 2\ell$ se tiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2gA\varepsilon h_o}{aQ_o} \qquad (3.12.8)$$

En consecuencia, dado ε, para T_2/T_1 menor o igual que $2\ \varepsilon\ h_o\ g\ A/a\ Q_o$ el modelo con a infinita da errores menores de el ε dado, respecto al modelo con a finita. Puede pues emplearse dicho modelo con ese márgen de error. Como ejemplo se verá el siguiente caso, $a = 1000$ m/s, $Q_o = 3\ m^3/s$, $A = 1\ m^2$, $h_o = 100$ m, $g = 9.81\ m/s^2$ y se tomará $\varepsilon = 0.1$. Calculando (3.12.8) resulta $T_2/T_1 = 0.0654$. En consecuencia si $T_2/T_1 < 0.0654$ los errores al emplear el modelo con a infinita serán menores que el 10%.

$\varepsilon_o h_o = \frac{\ell T_2 \cdot a Q_o}{g A T_1 2\ell}$

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2gA\varepsilon_o h_o}{a Q_o}$

3.13 Resolución del sistema no lineal. Método de las características

En la sección 3.9 se estudió en detalle el comportamiento de las ecuaciones linealizadas al suprimir el término de fricción en las ecuaciones generales (3.8.8) y (3.8.9) del fenómeno estudiado. La simplificación permitió introducir el concepto de las ondas F y G que viajan en ambos sentidos en la tubería y cuya adición o sustracción permite calcular Q ó h. Si bien lo anterior tiene mucho que ver con los fenómenos reales, sin embargo interesa estudiar un procedimiento que permita incluir el término de fricción en el cálculo. Para ello interesa preguntarse qué es lo que ve un observador que se desplaza en el sentido del flujo con velocidad a en el caso que hay fricción $(f > 0)$. Para este observador

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dt} = +\,a \qquad (3.13.1)$$

Despejando $\partial Q/\partial t$ y sustituyendo en (3.8.9) se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} - a\,\frac{\partial Q}{\partial s} + gA\,\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{f}{2DA}\,Q|Q| = 0 \qquad (3.13.2)$$

Empleando la ecuación (3.8.8) de conservación de la masa combinada con la ecuación constitutiva del sistema fluido + tubería, se puede calcular $\partial Q/\partial s = -\,gA/a^2 \cdot \partial h/\partial t$.

Sustituyendo en (3.13.2) se tiene:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{gA}{a}\left(\frac{\partial h}{\partial t} + a\,\frac{\partial h}{\partial s}\right) + \frac{f}{2DA}\,Q|Q| = 0 \qquad (3.13.3)$$

Pero recordando que $dh/dt = \partial h/\partial t + a\partial h/\partial s$, puede sustituirse esta expresión en (3.13.3) obteniéndose:

$$\frac{d}{dt}\left(Q + \frac{gA}{a}h\right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \qquad (3.13.4)$$

Procediendo análogamente pero ahora para un observador que viaja en el sentido contrario al flujo con velocidad $-a$, se concluye que

$$\frac{d}{dt}\left(Q - \frac{gA}{a}h\right) + \frac{fQ|Q|}{2DA} = 0 \qquad (3.13.5)$$

La interpretación de las ecuaciones (3.13.4) y (3.13.5) en el caso que $f = 0$ es sencilla pues se tiene que si el observador viaja con velocidad $+a$ ve que

$$\frac{d}{dt}\left(Q + g\frac{Ah}{a}\right) = 0 \rightarrow Q + g\frac{Ah}{a}$$ no depende del tiempo para este observador (3.13.6)

Ello equivale a la ecuación (3.9.18) encontrada en el capítulo 9.

Dicha ecuación establece que $dF(s,t)/dt = 0$.

El observador que viaja con velocidad $-a$ ve que:

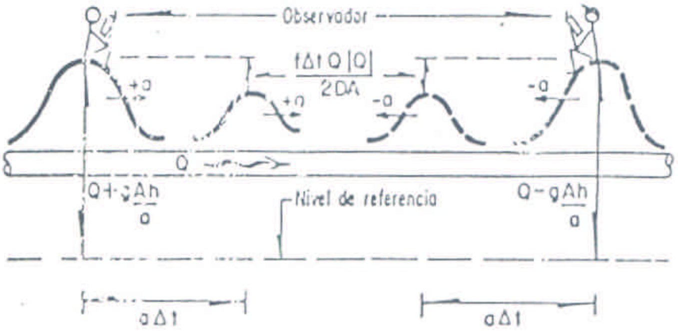
$$\frac{d}{dt}\left(Q - g\frac{Ah}{a}\right) = 0 \rightarrow Q - \frac{gA}{a}h$$ no depende del tiempo para este observador (3.13.7)

Esto equivale a la ecuación $dG(s,t)/dt = 0$.

Sin embargo, cuando $f > 0$, los términos $Q + gAh/a$ y $Q - gAh/a$ ya no serán independientes del tiempo para los respectivos observadores, sin embargo la variación para un intervalo de tiempo Δt será la misma para cada observador e igual a

$$\frac{f\Delta t}{2DA} Q|Q| \qquad (3.13.8)$$

según lo están indicando las ecuaciones (3.13.4) y (3.13.5). La magnitud del término $Q + gAh/a$ disminuye $f\Delta t\, Q|Q|/2DA$ para el observador que viaja con velocidad $+a$, al incrementarse el tiempo en Δt. Asimismo, la magnitud del término $Q - gAh/a$ disminuye también $f\Delta t\, Q|Q|/2DA$ para el observador que viaja con velocidad $-a$ al incrementarse el tiempo en Δt (figura 3.13.1).

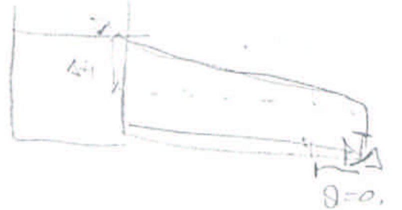


se incluye
empaquetamiento
en las
Características
donde lo incluye

Fi... ...gnitud ...términos Q ± gAh/a debido a la fricción.

Esta variación de los términos $Q + gAh/a$ y $Q - gAh/a$ es muy simple de plantear procediendo a escribir las ecuaciones (3.13.4) y (3.13.5) en incrementos finitos para cada observador.

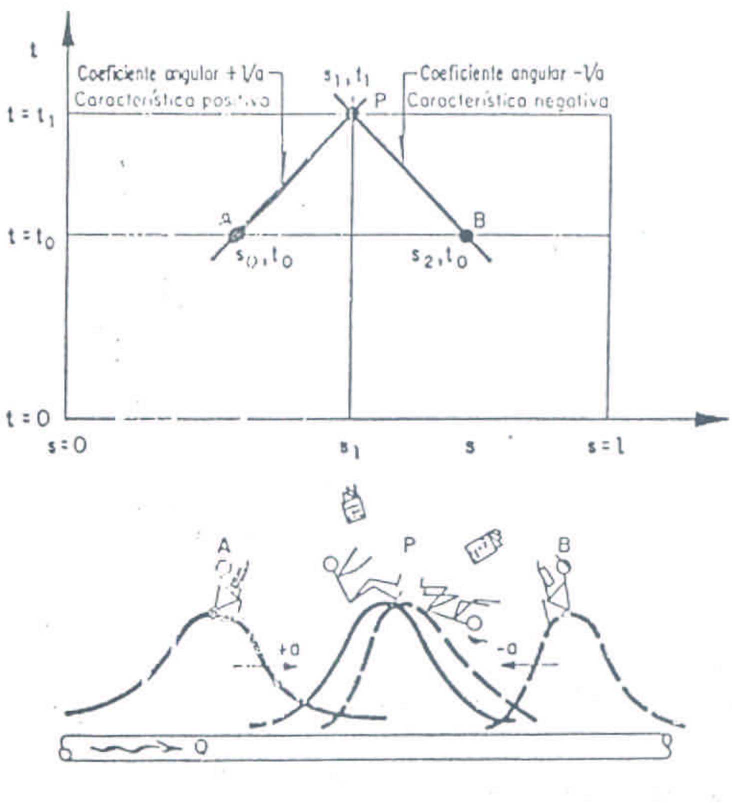
Empaquetamiento



Como se vió en la figura 3.9.6, si en el plano s,t se tienen los puntos A y B en $t = t_o$ ubicados de tal forma que en $t = t_1$ las rectas de coeficiente angular $+1/a$ y $-1/a$ que pasan por A y B se cortan en P (figura 3.13.2), se podrá escribir la ecuación (3.13.4) en forma incremental, de la siguiente forma:

$$\left[Q + \frac{gA}{a}\,h\right]_P - \left[Q + \frac{gA}{a}\,h\right]_A + \frac{f\Delta t Q_A|Q_A|}{2DA} = 0 \quad (3.13.9)$$

siendo $t_1 - t_o = \Delta t$.



Desfile de ondas para un observador en reposo respecto a la tubería

Fig 3.13.2 Cálculo aproximado de Q y h en P(s,t) conociendo Q y h en A(s_o, t_o) y B(s_2, t_o).

La ecuación (3.13.5) se podrá escribir también en forma incremental de la forma que se indica:

$$\left[Q - \frac{gAh}{a}\right]_P - \left[Q - \frac{gA}{a}h\right]_B + \frac{f\Delta t}{2DA} Q_B|Q_B| = 0 \qquad (3.13.10)$$

Si se admiten conocidos los valores Q_A, h_A, Q_B, h_B en el tiempo $t=t_0$, los valores Q_P, h_P en $t=t_1$ pueden calcularse a partir de (3.13.9) y (3.13.10) con tanto mayor aproximación cuanto menor sea Δt. Nótese que en el caso sin fricción el cálculo realizado de esta manera y descrito en la figura 3.9.6 era exacto. Su precisión no dependía del valor del incremento Δt. En cambio, cuando se introduce la fricción, el proceso de cálculo es aproximado y su precisión dependerá del Δt elegido. En el fascículo VII se examinará el problema de la elección de un Δt adecuado. El método empleado de estudiar la variación de las magnitudes del flujo sobre una curva particular del plano de las variables independientes (s,t) denominada curva característica, curva que permite una transformación de las ecuaciones (3.8.8) y (3.8.9) en derivadas parciales en las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.13.4) y (3.13.5), se denomina "método de las características" y su aplicación está estudiada en forma general para las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, en la bibliografía especializada.

$\frac{\Delta t}{\Delta x}$

Las ecuaciones (3.13.9) y (3.13.10) pueden escribirse en forma sintética de la siguiente manera:

$$Q_P = C_p - C_a h_P \quad \text{(característica positiva)} \qquad (3.13.11)$$

$$Q_P = C_n + C_a h_P \quad \text{(característica negativa)} \qquad (3.13.12)$$

donde

$$C_p = Q_A + \frac{gA}{a}h_A - \frac{f\Delta t}{2DA} Q_A|Q_A| \qquad (3.13.13)$$

$$C_n = Q_B - \frac{gA}{a}h_B - \frac{f\Delta t}{2DA} Q_B|Q_B| \qquad (3.13.14)$$

$$C_a = \frac{gA}{a} \qquad (3.13.15)$$

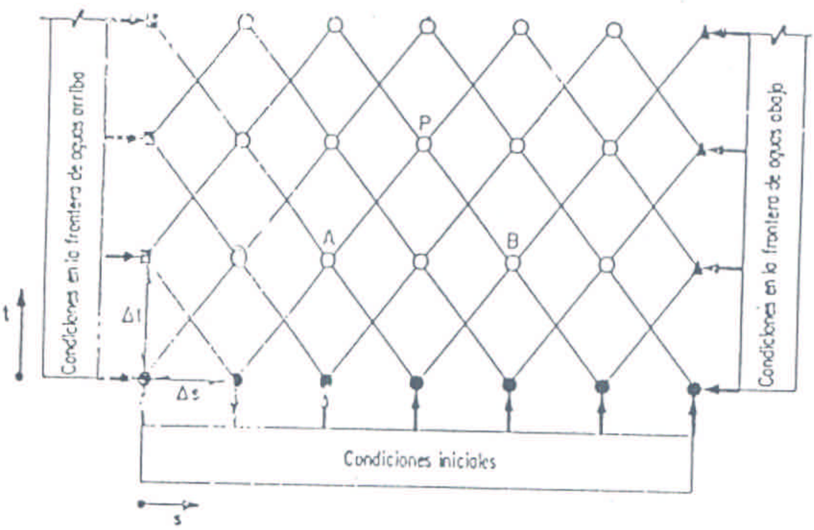
La ecuación (3.13.11) es válida sobre la recta de coeficiente angular +1/a que se denomina "característica positiva" y la ecuación (3.13.12) es válida sobre la recta de coeficiente angular -1/a que se denomina "característica negativa" (figura 3.13.2). En el punto P, ambas ecuaciones son válidas simultáneamente. En consecuencia, como ya se señaló Q_P y h_P pueden calcularse a partir del sistema formado por estas ecuaciones. Despejando Q_P y h_P de (3.13.11) y (3.13.12) se tiene que:

$$Q_P = \frac{C_p + C_n}{2} \qquad (3.13.16)$$

Análogo a las expresiones 4, 6

$$h_P = \frac{C_p - C_n}{2C_a} \qquad (3.13.17)$$

El cálculo de Q_P y h_P por medio de (3.13.16) y (3.13.17) puede realizarse en los puntos interiores de la tubería tal como surge de la malla de cálculo presentada en la figura 3.13.3. En esta malla se indicaron los puntos representativos A, B y P para todos los puntos "huecos" O, el procedimiento de cálculo es el que se describió. Sin embargo, como el lector puede observar, en los puntos llenos el procedimiento es inaplicable puesto que por su ubicación en los bordes de la malla no es posible construir el triángulo ABP. En estos puntos el cálculo se efectúa con ayuda de las condiciones iniciales o de frontera según se explica a continuación.



O Puntos interiores
● Puntos definidos por las condiciones iniciales
■ Puntos definidos por la condición de frontera de aguas arriba y los puntos interiores
▲ Puntos definidos por la condición de frontera de aguas abajo y los puntos interiores

Fig 3.13.3 Malla de cálculo.

Puntos ● - en ellos Q y h deben ser dados como datos para t = o.

Puntos ■ - en ellos la condición de frontera suministra una ecuación entre Q y h y la otra ecuación es la (3.13.12) (característica negativa).

Puntos ▲ - en ellos la condición de frontera suministra una ecuación entre Q y h y la otra ecuación es la (3.13.11) (característica positiva).

En consecuencia el cálculo se desarrollará de la siguiente forma:

1. Dadas las condiciones iniciales se conoce Q, en todos los puntos ●

2. Aplicando (3.13.11) y (3.13.12) se calculan Q,h para los puntos O de la primera fila, que corresponden a $t=\Delta t$.

3. Con la condición de frontera de aguas arriba, la ecuación (3.13.12) y el valor de Q, h en el punto ● adyacente al primero se calcula Q, h en el punto ■ de la primera fila ($t = \Delta t$).

4. Con la condición de frontera de aguas abajo, la ecuación (3.13.11) y el valor de Q, h en el punto ● adyacente al último se calcula Q, h en el punto ▲ de la primera fila ($t = \Delta t$).

De esta forma se logra calcular Q, h para todos los puntos de la primera fila ($t = \Delta t$). Se ha avanzado Δt en el tiempo y para calcular la segunda fila ($t = 2\Delta t$) se procede de la misma manera.

Para finalizar esta sección se verá en detalle como actúa una condición de frontera en el proceso de cálculo recién descrito. Como ejemplo se tomará un tanque de carga constante ubicado en el extremo de aguas arriba de una tubería. Otras condiciones de frontera se manejan de la misma forma tal como se indicará en el fascículo VII.

Según se vió en 3.10.1 la condición impuesta por un tanque de carga constante es $h = h_o$ para todo t (3.10.1). En consecuencia los puntos de la malla se resolverán así:

$$Q_P = C_n + C_a h_P \quad \text{(característica negativa)} \qquad (3.13.18)$$

$$h_P = h_o \quad \text{(condición de frontera)} \qquad (3.13.19)$$

donde $C_a = gA/a$ y C_n se calcula de acuerdo a la expresión (3.13.14) siendo el punto B en este caso el punto de la columna adyacente a la columna que representa la frontera y ubicado en la fila correspondiente a $t - \Delta t$ si el cálculo corresponde al instante t.

Para un tanque de carga constante en el extremo de aguas abajo el procedimiento sería similar salvo en que, como ya se dijo, se emplearía la ecuación (3.13.11) correspondiente a la característica positiva.

3.14 Implementación numérica del modelo con ondas

El proceso de cálculo mediante el método de las características puede realizarse con el auxilio de una computadora electrónica. El programa constará de dos partes. Una referida al cálculo en las tuberías y la otra referida al cálculo de las condiciones de frontera de las tuberías. Respecto al cálculo en las tuberías se emplea el método de las características visto en detalle en la sección anterior 3.13. Con dicho método y una adecuada selección de los intervalos Δs y Δt, disponiendo de los datos que definen Q y h en los extremos de los segmentos en los que se subdividió la tubería para el instante t, es posible calcular los valores de Q y h en el instante siguiente para los puntos medios de estos segmentos. Respecto al cálculo de las condiciones de frontera se procede tal como se indica en la sección 3.10 donde se vieron las condiciones de frontera más importantes para el tratamiento de los ejemplos que se analizarán a continuación. Falta sin embargo tratar el caso de una planta de bombeo como condición de frontera, ello será realizado en el capítulo 5 de este fascículo.

En el fascículo VII se hará una presentación completa de los programas de computadora desarrollados para el manejo numérico de los algoritmos propuestos en este fascículo.

4. VERIFICACION EXPERIMENTAL DEL MODELO CON ONDAS

En este capítulo se le presentará al lector un material de gran interés para la validación del modelo teórico de fenómenos transitorios considerando el fluido compresible y la tubería elástica. Se considerará una misma prueba realizada en diversas condiciones para que se evidencien los límites de validez del modelo. Estas experiencias han sido realizadas especialmente para su presentación en este texto en la instalación para el estudio experimental de transitorios hidráulicos que dispone desde 1983 el Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

4.1 Descripción de la instalación experimental

Una vista general de la mencionada instalación aparece en la figura 4.1.1. Esta instalación cuenta con una tubería comercial de acero galvanizado, de diámetro nominal D = 4" y ℓ = 1,468.62 m de longitud. En sus extremos posee sendos tanques que admiten aire comprimido para