Introducción a los Procesos Estocásticos

Germán Capdehourat, Sergio Martínez, Pablo Musé
{gcapde,sematag,pmuse}@fing.edu.uy

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

10 de agosto de 2021

Introducción

Introducción

- Casi cualquier sistema de utilidad es diseñado para procesar entradas que no se conocen

    ⇒ Mejora de señales de voz, restauración de grabaciones o películas antiguas

    ⇒ Compresión de audio, imágenes o video

    ⇒ Reducción de ruido y detección de señales de radar

    ⇒ Señales de origen geofísico, astronómico, biológico, etc.

- Que las señales no se conozcan exactamente no significa que de ellas no se sepa nada. Se pueden conocer o estimar ciertas propiedades estadísticas

    ⇒ E.g. señales de voz: aunque siempre distintas, tienen ancho de banda conocido, forma de onda y espectro reconocibles

Introducción (cont.)

- El estudio de **procesos estocásticos** formaliza el conocimiento sobre las señales aleatorias, a partir su **caracterización estadística**

  $\Rightarrow$ Con esta caracterización estadística se puede diseñar y estudiar sistemas alimentados con esta clase de entradas.

- Buena parte de la popularidad del enfoque probabilístico se debe a su éxito en la aplicación a sistemas de comunicación

  $\Rightarrow$ Claude Shannon. *A Mathematical Theory of Communication.* The Bell System Technical Journal, 1948. Lectura fundamental!!

Definición

- Limitaremos la exposición a señales unidimensionales
- Las definiciones se pueden extender a señales de dimensión mayor:
  - $\Rightarrow$ Imágenes (dos dimensiones x e y)
  - $\Rightarrow$ Secuencias de video (tres dimensiones x, y, t), etc.

Def: Un **proceso estocástico** es una función aleatoria de dos variables, $X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ un suceso, y $t \in T$ un índice temporal

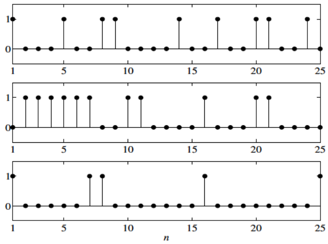
- Fijado $t = t_0$, $X(\omega, t_0)$ es una variable aleatoria
- Para cada experimento (elección de ω), la realización $X(\omega, t)$ es una función del tiempo. Extensión de la noción de VA a funciones
- $T = \mathbb{R}$ para procesos continuos, $T = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ para procesos discretos
- Es usual hacer abuso de notación y escribir $X(t)$
- Salvo que se indique, trabajaremos con procesos reales: $X(t) \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

Transmisión de secuencia de bits independientes. Cada bit toma el valor '$1'$ con probabilidad p, '$0'$ con probabilidad $1-p$, indep. del resto.

$\Rightarrow \{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ proceso i.i.d. con distrib. de Bernoulli(p).

Tres realizaciones



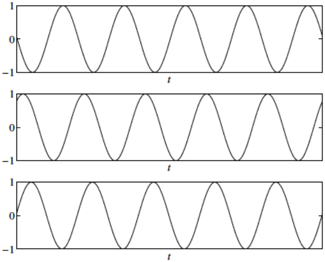
Ejemplos

Señal portadora en comunicaciones. En el receptor, se modela como

$$X(t) = \cos(2\pi f t + \Theta), \quad \text{con} \quad \Theta \sim \mathcal{U}[-\pi, \pi).$$

$\Rightarrow$ Fase aleatoria: incertidumbre del receptor sobre cuándo se prendió el transmisor, o sobre su distancia.

Tres realizaciones

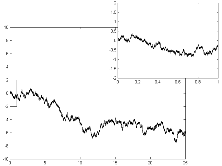


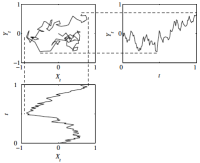
Ejemplo: Movimiento Browniano o proceso de Wiener

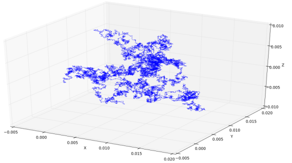
Camino errático, movimiento de partículas en un fluido, cotización de acciones en bolsa, etc.

$\{W(t), t \geq 0\}$ tal que:

- $W(0) = 0$
- Incrementos independientes: para todo $t > 0$, los incrementos futuros $W(t+u) - W(t)$, $u \geq 0$ son independientes de los valores pasados $W(s)$, $s < t$
- Incrementos Gaussianos: $W(t+u) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, u)$
- Realizaciones o caminos continuos: $W(t)$ continua para todo $t > 0$.







Caracterización de procesos estocásticos

Caracterización de procesos estocásticos

Un proceso estocástico $X(t)$ está **totalmente caracterizado** cuando podemos determinar su distribución conjunta

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}\left(X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n\right),$$

para todo conjunto de tiempos $t_1, \ldots, t_n$, $1 \leq n < +\infty$.

Usualmente: cdfs conj. desconocidas, debemos estimarlas de los datos

- Costo computacional **prohibitivo** $\Rightarrow$ **Caracterizaciones parciales**
- Usualmente: caracterizaciones parciales de una o dos VAs $X(t_1)$, $X(t_2)$: medias, varianzas, correlaciones

Funciones de media, autocorrelación y autocovarianza

Sea el proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$.
Def: Para todo valor de t, $X(t)$ es una VA de media $\mathbb{E}[X(t)]$. Llamamos **función de media** del proceso $X(t)$ a la función

$$m_X(t) := \mathbb{E}[X(t)] .$$

- Refleja el comportamiento medio del proceso a lo largo del tiempo.

Def: Para todo $t_1, t_2 \in T$, llamamos **función de autocorrelación** del proceso $X(t)$ en t_1, t_2 a la función

$$R_X(t_1, t_2) := \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] ,$$

y **función de autocovarianza** a

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &:= \mathbb{E}[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))] \\ &= R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \end{aligned}$$

- Corresponde a la correlación/covarianza entre las VAs $X(t_1)$ y $X(t_2)$
- Refleja cuán suave o variante es el proceso en el tiempo.

Propiedades de la autocorrelación

- La función de autocorrelación es simétrica:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right] = \mathbb{E}\left[X(t_2)X(t_1)\right] = R_X(t_2, t_1)$$

- $R_X(t, t) = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] \geq 0$
- Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\forall\ t_1, t_2,$

$$|R_X(t_1, t_2)| = |\mathbb{E}\left[X(t_1)X(t_2)\right]| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2(t_1)\right]\mathbb{E}\left[X^2(t_2)\right]}.$$

- La autocorrelación es una función semi-definida positiva:

$$\forall\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i R_X(t_i, t_j) c_j \geq 0.$$

En efecto, $\sum_i \sum_j c_i \mathbb{E}\left[X(t_i)X(t_j)\right] c_j =; \sum_i \sum_j \mathbb{E}\left[c_i X(t_i)X(t_j)c_j\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_i c_i X(t_i) \sum_j c_j X(t_j)\right] = \mathbb{E}\left[|\sum_i c_i X(t_i)|^2\right] \geq 0.$$

Procesos estocásticos de segundo orden

Def: Decimos que $X(t)$ es un **proceso de segundo orden** si $\forall\ t$, $\mathbb{E}\left[X^2(t)\right] < +\infty$.

Si $X(t)$ es de segundo orden,

- La media es finita:

$$|\mathbb{E}[X(t)]| = |\mathbb{E}[X(t) \cdot 1]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2(t_1)]\,\mathbb{E}[1^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2(t_1)]}.$$

- La autocorrelación es finita:

$$|R_X(t_1, t_2)| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2(t_1)]\,\mathbb{E}[X^2(t_2)]}.$$

- La autocovarianza es finita (por serlo la autocorrelación y la media).

Ejemplo: paseo al azar (*random walk*)

Proceso de incrementos no correlacionados $\left\{Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ \ n \geq 0\right\}$
con $X_i = \pm\Delta$, $\mathrm{P}\left(X_i = +\Delta\right) = \mathrm{P}\left(X_i = -\Delta\right) = 1/2$

$$m_Y(n) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i\right] = n\left(\tfrac{\Delta}{2} - \tfrac{\Delta}{2}\right) = 0$$

$$\mathrm{var}\left[Y_n\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}\left[X_i\right] = n\,\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = n\,\Delta^2$$

(i) $m > n$:

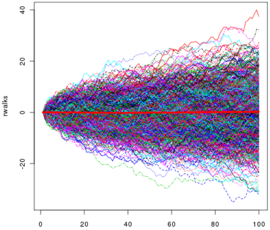
$$R_Y(n,m) = \mathbb{E}\left[Y_n Y_m\right] = \mathbb{E}\left[Y_n\left(Y_n + \sum_{i=n+1}^{m} X_i\right)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[Y_n^2\right] + \mathbb{E}\left[Y_n \sum_{i=n+1}^{m} X_i\right] = n\,\Delta^2$$

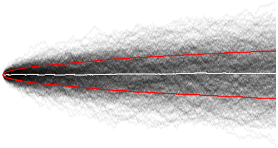
ya que

- $\mathbb{E}\left[Y_n\right] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \mathrm{var}\left[Y_n\right] = n\,\Delta^2$
- $\mathbb{E}\left[Y_n \sum_{i=n+1}^{m} X_i\right] =$
  $\mathbb{E}\left[Y_n\right]\mathbb{E}\left[\sum_{i=n+1}^{m} X_i\right] = 0.$

(ii) $m \leq n$: $R_Y(n,m) = m\,\Delta^2$

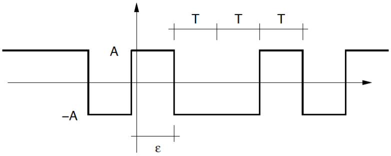
Luego, $\boxed{\forall\ m,n,\ R_Y(n,m) = \Delta^2 \min\{m,n\}}$





Ejemplo: Onda binaria aleatoria

Sea el proceso estocástico $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, donde las X_n son i.i.d. y toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad $1/2$. Consideramos la señal $Y(t) = AX_n$ en el intervalo $[nT + \varepsilon, (n+1)T + \varepsilon]$, con $\varepsilon \sim \mathcal{U}[0, T]$, independiente de los X_n.



- ¿Media y autocorrelación de $Y(t)$?

Obs.: Podemos escribir

$$Y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n A h(t-(nT+\varepsilon)), \quad \text{con} \quad h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo: Onda binaria aleatoria (cont.)

Usando linealidad de la esperanza, independencia de las VAs y $\mathbb{E}[X_n] = 0$,

$$m_Y(t) = \mathbb{E}_{X_{\mathbb{Z}},\varepsilon}[Y(t)] = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_{X_n}[X_n]\mathbb{E}_{\varepsilon}[h(t-(nT+\varepsilon))] = 0$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1,t_2) &= \mathbb{E}_{X_{\mathbb{Z}},\varepsilon}[Y(t_1)Y(t_2)] \\ &= A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_{X_n,X_m}[X_n X_m]\mathbb{E}_{\varepsilon}[h(t_1-(nT+\varepsilon))h(t_2-(mT+\varepsilon))] \end{aligned}$$

Como

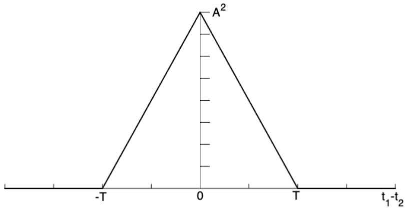
$$\mathbb{E}_{X_n,X_m}[X_n X_m] = \begin{cases} \mathbb{E}[X_n]\mathbb{E}[X_m] = 0, & n \neq m \\ \mathbb{E}[X_n^2] = \frac{1}{2}(-1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 = 1, & m = n, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R_Y(t_1,t_2) &= A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}_{\varepsilon}[h(t_1-(nT+\varepsilon))h(t_2-(nT+\varepsilon))] \\ &= A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T h(t_1-(nT+\varepsilon))h(t_2-(nT+\varepsilon))d\varepsilon. \end{aligned}$$

Ejemplo: Onda binaria aleatoria (cont.)

Con el cambio de variable $\phi = t_1 - (nT + \varepsilon)$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= A^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1-(n+1)T}^{t_1-nT} h(\phi)h(t_2 - t_1 + \phi)d\phi \\
&= A^2 \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h(\phi)h(t_2 - t_1 + \phi)d\phi \\
&= \begin{cases} A^2\left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T}\right), & |t_2 - t_1| < T \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}
\end{aligned}
$$



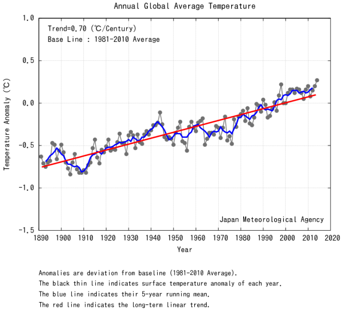
Procesos estocásticos estacionarios (sentido estricto)

Procesos estocásticos estacionarios (sentido estricto)

Intuitivamente, un proceso estacionario es aquel para el cual sus propiedades estadísticas no cambian en el tiempo.

- **Ej:** Sintonizamos un receptor FM en un canal libre. El ruido de fondo que escuchamos es estacionario ya que suena siempre igual: no cambia de volumen ni de sonido con el tiempo.

- **Ej:** Temperatura global anual.



Es un proceso no estacionario (el calentamiento global es un hecho).

Procesos estocásticos estacionarios (sentido estricto)

Def: Un proceso estocástico es **estrictamente estacionario al orden** n si, para todo conjunto de n tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, la distribución conjunta

$$F_{t_1+\Delta t,\ldots,t_n+\Delta t}(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{P}\left(X(t_1+\Delta t) \leq x_1, \ldots, X(t_n+\Delta t) \leq x_n\right)$$

es independiente de Δt, para cualquier Δt.

Si el proceso es estrictamente estacionario de orden n para todo n entero positivo, decimos que es **estacionario en sentido estricto (SSS)**.

- Su estadística es invariante ante translaciones
- Su estadística sólo depende de la diferencia de tiempo entre instantes considerados.
- **Ex:** Una proceso $X(t)$ i.i.d. $\sim F(x)$ es estrictamente estacionario:

$$\mathrm{P}\left(X(t_1+h) \leq x_1, \ldots, X(t_n+h) \leq x_n\right) = F(x_1)\cdots F(x_n),$$

  - independientemente de la elección de índices $\{t_1, \ldots, t_n\}$.
  - cualquiera sea F.

Procesos estocásticos estacionarios (sentido estricto)

- Verificar la estacionariedad estricta de orden n de un proceso requiere calcular todas las cdf (pmf) o pdf conjuntas $f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$ para todo $(t_1,\ldots,t_n) \in T^n \Rightarrow$ **computacionalmente intratable**.

  $\Rightarrow$ Nos limitaremos (salvo excepciones) a caracterizaciones de orden 2

- Aún la estimación de densidades para caracterizaciones de orden 2, $f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$ para todo $(t_1,t_2) \in T^2$ es general **intratable**

- En la práctica, en general es suficiente con verificar la estacionariedad para los dos primeros momentos

  $\Rightarrow$ estacionariedad en **sentido amplio** (medias y correlaciones)

Sobre los procesos complejos

Sea $Z(t) = X(t) + iY(t)$ un proceso complejo ($X(t)$, $Y(t)$ reales).

- $Z(t)$ es SSS si $X(t)$ e $Y(t)$ son ambos SSS.
- $\mathbb{E}[Z(t)] = \mathbb{E}[X(t)] + i\,\mathbb{E}[Y(t)]$.
- $R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)Y(t_2)]$, $R_{YX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[Y(t_1)X(t_2)]$
- En general los procesos de interés son circulares, i.e. su estadística es invariante a rotaciones: $\forall\ t$, $\forall\ \phi \in [-\pi, \pi]$ determinístico,

$$e^{i\phi}Z(t) \text{ tiene igual distribución que } Z(t).$$

- Si $Z(t)$ es circular:

$$R_{YX}(t_1, t_2) = -R_{XY}(t_1, t_2),$$
$$R_Z(t_1, t_2) := \mathbb{E}[Z(t)Z^*(t)] = 2R_X(t_1, t_2) + 2iR_Y(t_1, t_2),$$
$$\mathbb{E}[Z(t_1)Z(t_2)] = 0,\ \forall\ t_1, t_2.$$

Sobre los procesos complejos (cont.)

Sea $Z(t) = X(t) + iY(t)$ un proceso complejo circular.

- La función de autocorrelación es hermítica:

$$R_Z(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left[Z(t_1)Z^*(t_2)\right] = \mathbb{E}\left[\left(Z^*(t_1)Z(t_2)\right)^*\right] = R_Z^*(t_2, t_1)$$

- $R_Z(t, t) = \mathbb{E}\left[Z(t)Z^*(t)\right] = \mathbb{E}\left[|Z(t)|^2\right] \geq 0$
- Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $\forall\ t_1, t_2$,

$$|R_Z(t_1, t_2)| = |\mathbb{E}\left[Z(t_1)Z^*(t_2)\right]| \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[|Z(t_1)|^2\right]\mathbb{E}\left[|Z(t_2)|^2\right]}.$$

- La autocorrelación es una función semi-definida positiva:

$$\forall\ c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C},\ \ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i R_X(t_i, t_j) c_j^* \geq 0.$$

En efecto,

$$\sum_i \sum_j c_i \mathbb{E}\left[Z(t_i)Z^*(t_j)\right] c_j^* =; \sum_i \sum_j \mathbb{E}\left[c_i Z(t_i) Z^*(t_j) c_j^*\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_i c_i Z(t_i) \sum_j c_j^* Z^*(t_j)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_i c_i Z(t_i)\right)\left(\sum_j c_j Z(t_j)\right)^*\right] \geq 0.$$

Procesos estocásticos estacionarios (sentido amplio)

Procesos estocásticos estacionarios (sentido amplio)

Def: Un proceso es **estacionario en sentido amplio (WSS)** si satisface las tres propiedades siguientes:

(i) Es un proceso de segundo orden, i.e. $\forall t,\ \mathbb{E}\left[|X^2(t)|\right] < +\infty$

(ii) Su función de media $\mathbb{E}[X(t)]$ no depende de t,

(iii) Su función de autocorrelación cumple

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2, 0),$$

i.e. depende de t_1 y t_2 sólo a través de su diferencia $t_1 - t_2$, esto es $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_1 + h, t_2 + h)\ \forall\ t_1, t_2, h$.

- Por lo anterior, para procesos WSS

$$R(t + \tau, t) =: R(\tau).$$

Propiedades de la autocorrelación de procesos WSS

- $R_X(\tau)$ es par:

$$\begin{aligned} R_X(-\tau) &= \mathbb{E}\left[X(t)X(t-\tau)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X(t-\tau)X(t)\right] \\ &= R_X(t-(t-\tau)) = R_X(\tau). \end{aligned}$$

- $R_X(0) = \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] \geq 0$

- $R_X(\tau) \leq R_X(0)$:

  Por Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} R_X(\tau) = \mathbb{E}\left[X(t+\tau)X(t)\right] &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]\mathbb{E}\left[X^2(t+\tau)\right]} \\ &= \sqrt{\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]} \\ &= \mathbb{E}\left[X^2(t)\right] = R_X(0). \end{aligned}$$

La onda binaria aleatoria es WSS

Para la onda binaria aleatoria

$$Y(t) = AX_n \quad \text{en el intervalo } [nT + \varepsilon, (n+1)T + \varepsilon],$$

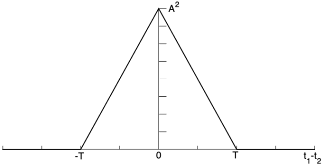
con $X_n = \pm 1$ i.i.d. equiprobable, y $\varepsilon \sim \mathcal{U}[0, T]$, indep. de los X_n,

vimos que

$$m_Y(t) = 0$$

$$R_Y(t_1, t_2) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|t_2 - t_1|}{T}\right), & |t_2 - t_1| < T \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Media constante, autocorrelación sólo depende de $t_2 - t_1$



Observar que $R_X(\tau)$ es par y tiene máximo en 0.

Ejemplos

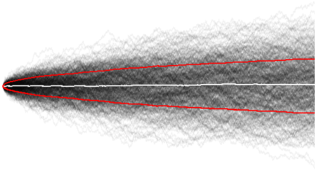
El paseo al azar o *random walk* no es WSS

Para el paseo al azar

$\left\{Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n \geq 0\right\}$, X_i no correlacionadas, $\mathbb{E}\left[X_i\right] = 0$, $\operatorname{var}\left[X_i\right] = \sigma^2$,

teníamos

- $m_Y(n) = 0$
- $\operatorname{var}\left[Y_n\right] = n\sigma^2$
- $R_Y(m,n) = \sigma^2 \min\{m, n\}$



Además de que la autocorrelación depende de n y m pero no de $m - n$, **basta con ver que la varianza depende de** n.

Transformaciones de procesos SSS y WSS

Cualquier función de un proceso SSS es un proceso SSS

Demostración.

Sea $\{X(t), t \in T\}$ un proceso SSS y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función. Definimos el proceso $\{Y(t), t \in T\}$, $Y(t_k) = g(X(t_k), X(t_{k+1}), \ldots, X(t_{k+m-1}))$.

La distribución conjunta de $Y(t_1 + h), \ldots, Y(t_n + h)$ es

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y(t_1+h) \leq y_1,\ \ldots, Y(t_n+h) \leq y_n) \\
&= \mathrm{P}(g(X(t_1+h), \ldots, X(t_m+h)) \leq y_1, \\
&\qquad \ldots, g(X(t_n+h), \ldots, X(t_{n+m-1}+h)) \leq y_n) \\
&= \mathrm{P}(g(X(t_1), \ldots, X(t_n)) \leq y_1, \ldots, g(X(t_n), \ldots, X(t_{n+m-1})) \leq y_n) \\
&= \mathrm{P}(Y(t_1) \leq y_1, \ldots, Y(t_n) \leq y_n),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad vale por ser $\{X(t), t \in T\}$ SSS. Tenemos entonces que $\{Y(t), t \in T\}$ es SSS. $\square$

Transformaciones de procesos SSS y WSS

Cualquier función lineal de un proceso WSS es un proceso WSS

Lo veremos para el caso continuo (caso discreto: análogo con sumas)

- $X(t)$, media m_X, autocorrelación $R_X(\tau)$.
- Sistema LTI estable, con respuesta al impulso $h(t)$. ($\|h\|_1 < \infty$)

$\Rightarrow$ Caracterizar su salida $Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t-u)du$

$$\mathbb{E}\left[Y(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,\mathbb{E}\left[X(t-u)\right] du = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y(t+\tau)Y(t)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)X(t+\tau-u)du \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)X(t-v)dv\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)\,\mathbb{E}\left[X(t+\tau-u)X(t-v)\right] dv\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)R_X(\tau-u+v)dv\,du =: R_Y(\tau)
\end{aligned}$$

(es válido intercambiar el orden de la esperanza con las integrales, ya que las integrales convergen por ser el filtro estable).

Cualquier función lineal de un proceso WSS es un proceso WSS

Para procesos en tiempo discreto, igual que para tiempo continuo:

- $X(n)$, media m_X, autocorrelación $R_X(k) = \mathbb{E}\left[X(k+j)X(j)\right]$.
- Sistema LTI estable, con respuesta al impulso $h(n)$. $(\|h\|_1 < \infty)$

$\Rightarrow$ Caracterizar su salida $Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)X(n-k)$

$$\mathbb{E}\left[Y(n)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\,\mathbb{E}\left[X(n-k)\right] = m_X \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)$$

$$\mathbb{E}\left[Y(k+n)Y(k)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)X(n+k-i)du \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)X(k-j)dv\right]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j)\,\mathbb{E}\left[X(n+k-i)X(k-j)\right] dv\, du$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(j) R_X(n-i+j) =: R_Y(n)$$

(es válido intercambiar el orden de la esperanza con las sumas, ya que las sumas convergen por ser el filtro estable).

Relación entre estacionariedad amplia y estricta

Relación entre estacionariedad amplia y estricta

- **Q:** ¿Un proceso SSS es necesariamente WSS? **NO!**
- Como la definición de un proceso SSS no requiere que el proceso sea de segundo orden, SSS no necesariamente implica WSS.

Ejemplo

$X(t)$ i.i.d. con distribución de Cauchy estándar $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$.

Tenemos:

- Como todo proceso i.i.d., su cdf es invariante ante translaciones $\Rightarrow$ SSS
- $\mathbb{E}[X(t)]$ y $\mathbb{E}\left[X^2(t)\right]$ son infinitas $\Rightarrow$ No WSS

Relación entre estacionariedad amplia y estricta (cont.)

- **Q:** ¿Un proceso de segundo orden SSS es necesariamente WSS? **SI**

Demostración.

Como el proceso $\{X(t),\ t \in T\}$ es SSS, las VAs

$$X(t_1), X(t_2), \dots$$

tienen todas la misma función de distribución

$\Rightarrow (X(t_1), X(t_2))$ y $(X(t_1 + h), X(t_2 + h))$ tienen la misma distribución conjunta $\forall\ t_1, t_2, h$

Como el proceso es de segundo orden, sus momentos de orden 2 son finitos lo que implica que

- $\mathbb{E}[X(t)]$ es constante
- $\forall\ t_1, t_2, h,\ R_X(t_1 + h, t_2 + h) = R_X(t_1, t_2)$.

$\square$

Relación entre estacionariedad amplia y estricta (cont.)

- **Q:** ¿Un proceso WSS es necesariamente SSS? **Claramente NO**

Ejemplo

Sea $\{X(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$ un proceso estocástico definido por

$$X(n) = \begin{cases} u(n) & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(u(n)^2 - 1\right) & \text{si } n \text{ impar} \end{cases},$$

con $u(n)$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0,1)$. Este proceso es WSS pero no es SSS.

Demostración.
Ejercicio. $\square$

Relación entre estacionariedad amplia y estricta (cont.)

Existe sin embargo un caso importante para el cual WSS $\Rightarrow$ SSS:

Si $\{X(t), t \in T\}$ es un proceso Gaussiano WSS $\Rightarrow$ $\{X(t), t \in T\}$ es SSS

¿Por qué?

Relación entre estacionariedad amplia y estricta (cont.)

Def: $\{X(t), t \in T\}$ es un **proceso Gaussiano (GP)** si y sólo si toda n-tupla $\mathbf{X} := (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))^T$ es un conjunto de VAs Gaussianas. La pdf conjunta de $\mathbf{X}$ es

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{C_X})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C_X}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right),$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es su media media y $\mathbf{C_X}$ su matriz de covarianza

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right] = \left(\mathbb{E}\left[X(t_1)\right], \mathbb{E}\left[X(t_2)\right], \ldots, \mathbb{E}\left[X(t_n)\right]\right)^T$$

$$\mathbf{C_X} = \mathrm{cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X^2(t_1)) & \mathrm{cov}(X(t_1), X(t_2)) & \ldots & \mathrm{cov}(X(t_1), X(t_n)) \\ \mathrm{cov}(X(t_2), X(t_1)) & \mathrm{cov}(X^2(t_2)) & \ldots & \mathrm{cov}(X(t_2), X(t_n)) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X(t_n), X(t_1)) & \mathrm{cov}(X(t_n), X(t_2) & \ldots & \mathrm{cov}(X^2(t_n)) \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ **Totalmente caracterizado por sus dos primeros momentos**

Relación entre estacionariedad amplia y estricta (cont.)

Demostración.

Como el proceso es WSS, verifica

- $\forall\ t,\ \mathbb{E}[X(t)] = \mu < +\infty$,
- $\forall\ t,\ \mathrm{var}[X(t)] = \sigma^2 < +\infty$
- $\forall\ t_1, t_2, h,\ \mathrm{cov}(X(t_1+h), X(t_1+h)) = \mathrm{cov}(X(t_1), X(t_1))$

Un GP queda determinado por su media y covarianza; como son inv. a traslaciones, $f_{X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h)}(\mathbf{x}) = f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(\mathbf{x})$: el GP es SSS. $\square$

Obs: el recíproco es cierto ya que los procesos Gaussianos son de segundo orden, y por end SSS $\Rightarrow$ WSS.

$\Rightarrow$ Para procesos Gaussianos, **WSS** $\Leftrightarrow$ **SSS**

Estimación de autocorrelaciones de procesos WSS

Estimación de autocorrelaciones de procesos WSS

En la práctica no disponemos de la función de autocorrelación y debemos estimarla de los datos. Sea $\{X(k), k \in \mathbb{Z}\}$ un proceso discreto WSS.

Definimos

$$\langle R_X(n) \rangle_N := \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} X(k+n)X(k).$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\langle R_X(n) \rangle_N\right] &= \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} \mathbb{E}\left[X(k+n)X(k)\right] \\
&= \frac{1}{2N+1}(2N+1)R_X(n) = R_X(n)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle R_X(n) \rangle_N$ es un estimador insesgado de $R(n)$.

Los teoremas ergódicos (más adelante) aseguran que, bajo ciertas condiciones:

$$\langle R_X(n) \rangle_N \xrightarrow{N \to +\infty} R_X(n).$$

Estimación de autocorrelaciones de procesos WSS (cont.)

Para procesos continuos $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ WSS, definimos

$$\langle R_X(\tau) \rangle_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t+\tau) X(t) dt.$$

Tenemos

$$\mathbb{E}\left[\langle R_X(\tau) \rangle_T \right] = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{E}\left[X(t+\tau) X(t) \right] dt = R_X(\tau)$$

$\Rightarrow \langle R(\tau) \rangle_T$ es un estimador insesgado de $R_X(\tau)$.

Los teoremas ergódicos (más adelante) aseguran que, bajo ciertas condiciones:

$$\langle R_X(\tau) \rangle_T \xrightarrow{T \to +\infty} R_X(\tau).$$

Filtrado lineal de procesos WSS

Tiempo continuo:

La transformada de Fourier (FT) de $R(\tau) \in L^2(\mathbb{R})$ se define como

$$S_X(f) := \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau.$$

Por la fórmula de inversión,

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{i2\pi f \tau} df.$$

Propiedad: Como $R(\tau)$ es real y par, $S_X(f)$ es real y par.

Tiempo discreto:

La transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de $R(k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se define como

$$S_X(e^{i\theta}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X(k) e^{-ik\theta}.$$

Por la fórmula de inversión,

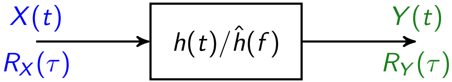
$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_X(e^{i\theta}) e^{ik\theta} d\theta.$$

Propiedades:

- $S_X(e^{i\theta})$ es 2π-periódica
- Como $R(k)$ es real y par, $S_X(e^{i\theta})$ es real y par.

Filtrado LTI de procesos WSS

Vimos que un proceso $X(t)$ WSS, al pasar por un filtro LTI estable, produce otro proceso $Y(t)$ WSS:



$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(v) R_X(\tau - u + v) dv \right) du$$

Antes de seguir con el análisis de $R_Y(\tau)$ veamos qué sucede con la **correlación cruzada** de $X(t_1)$ e $Y(t_2)$

Filtrado LTI de procesos WSS (cont.)

$$\mathbb{E}\left[X(t_1)Y(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathbb{E}\left[X(t_1)X(t_2-u)\right] du$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_X(t_1-t_2+u)du$$

Dos procesos $X(t)$, $Y(t)$, ambos WSS, se dicen conjuntamente WSS (J-WSS) si su correlación cruzada $\mathbb{E}\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$ depende sólo de $t_1 - t_2$.

$$R_{XY}(\tau) := \mathbb{E}\left[X(t+\tau)Y(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)\mathbb{E}\left[X(t+\tau)X(t-v)\right] dv$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(v)R_X(\tau+v)du \overset{\{w=-v\}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(-w)R_X(\tau-w)dw$$

Si definimos $\bar{h}(w) = h(-w)$, tenemos: $\boxed{R_{XY}(\tau) = \bar{h} * R_X(\tau)}$

Filtrado LTI de procesos WSS (cont.)

Volviendo a la autocorrelación de la salida del LTI, $Y(t)$:

$$
\begin{aligned}
R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(v) R_X(\tau - u + v) dv \right) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) R_{XY}(\tau - u)\, du = h * R_{XY}(\tau)
\end{aligned}
$$

Como $R_{XY}(\tau) = \bar{h} * R_X(\tau)$, tenemos

$$\boxed{R_Y(\tau) = h * R_{XY}(\tau) = h * \bar{h} * R_X(\tau)}$$

con $\bar{h}(u) = h(-u)$.

Filtrado LTI de procesos WSS (cont.)

Análisis en el dominio de las frecuencias

$$\underset{R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f)}{X(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)/\hat{h}(f)} \longrightarrow \underset{R_Y(\tau) \leftrightarrow S_Y(f)}{Y(t)}$$

- La transferencia del filtro es $\hat{h}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-i2\pi ft}dt$.
- La FT de $R_X(\tau)$ es $S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau$.
- La FT de $R_{XY}(\tau)$ vale:

$$S_{XY}(f) = \mathcal{F}\left\{\bar{h} * R_X\right\}(f) \overset{\{\bar{h}(u)=h(-u)\}}{=} \hat{h}^*(f)S_X(f)$$

- La FT de $R_Y(\tau)$ vale:

$$\boxed{S_Y(f) = \mathcal{F}\left\{h * R_{XY}\right\}(f) = \hat{h}(f)S_{XY}(f) = \left|\hat{h}(f)\right|^2 S_X(f)}$$

Tiempo discreto (ejercicio del práctico)

$$X(n) \qquad R_X(k) \leftrightarrow S_X(e^{i\theta}) \longrightarrow \boxed{h(n)/\hat{h}(e^{i\theta})} \longrightarrow Y(n) \qquad R_Y(k) \leftrightarrow S_Y(e^{i\theta})$$

- La transferencia del filtro es $\hat{h}(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-in\theta}$.
- La DTFT de $R_X(k)$ es $S_X(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k)e^{-ik\theta}$.
- La DTFT de $R_{XY}(k)$ vale:

$$S_{XY}(e^{i\theta}) = \mathcal{F}\left\{\bar{h} * R_X\right\}(e^{i\theta}) \overset{\{\bar{h}(k)=h(-k)\}}{=} \hat{h}^*(e^{i\theta})S_X(e^{i\theta})$$

- La DTFT de $R_Y(k)$ vale:

$$\boxed{S_Y(e^{i\theta}) = \mathcal{F}\left\{h * R_{XY}\right\}(f) = \hat{h}(e^{i\theta})S_{XY}(e^{i\theta}) = \left|\hat{h}(e^{i\theta})\right|^2 S_X(e^{i\theta})}$$