Señales y Sistemas

Segundo parcial

Instituto de Ingenieía Eléctrica

3 de julio de 2023

Indicaciones

- La prueba consiste en tres problemas y una pregunta.
- La prueba es individual y solamente se puede consultar la hoja de fórmulas oficial del curso.
- La prueba tiene una duración total de tres horas y media.
- La entrega del parcial consiste de dos partes. Primero, la entrega de las hojas utilizadas para la resolución de los ejercicios, convenientemente identificadas. Segundo, la entrega en el EVA de estas hojas digitalizadas, como se explica a continuación.
- La entrega en el EVA del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Para esto tendrán 30 minutos extra.
- La entrega en el EVA se realizará a través de la tarea (Segundo Parcial 2023) en el EVA de la asignatura.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., número de hoja, y el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción, siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería.

Problema 1 [17 puntos]

Un sistema causal realimentado es construido con las transferencias $H(s) = \frac{a}{s+a}$, $a > 0$ y $G(s) = \frac{k}{s}$ como indica la figura 1.

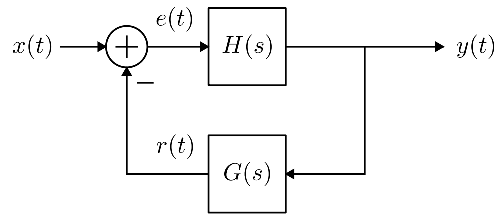


Figura 1: Sistema realimentado.

(a) Demostrar que el sistema en lazo abierto ($k = 0$) es estable.

(b) Hallar la transferencia en lazo cerrado del sistema.

(c) Hallar $k = k_D$ para que el sistema en lazo cerrado tenga un polo doble.

(d) Demostrar que $\forall k > k_D$, el sistema en lazo cerrado tendrá polos complejos conjugados.

(e) Demostrar que el sistema en lazo cerrado es estable $\forall k > 0$.

(f) Para $k = k_D$, hallar la respuesta al impulso del sistema.

(g) Si se aplica una entrada escalón ($x(t) = u(t)$) demostrar que:

$$\lim_{t \to +\infty} e(t) = 0 \quad \forall k > 0.$$

Problema 2 [15 puntos]

En la figura 2 se muestra un sistema que procesa señales en tiempo continuo usando un filtro digital $h[n]$ que es causal y con la ecuación en diferencias

$$y[n] = x[n] + x[n-1].$$

El sistema de la figura resulta equivalente a un LTI en tiempo continuo $H_c(j\omega)$, $Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)\, X_c(j\omega)$.

(a) Hallar la respuesta en frecuencia del filtro $H(e^{j\theta})$.

(b) Bosquejar el módulo de $H(e^{j\theta})$.

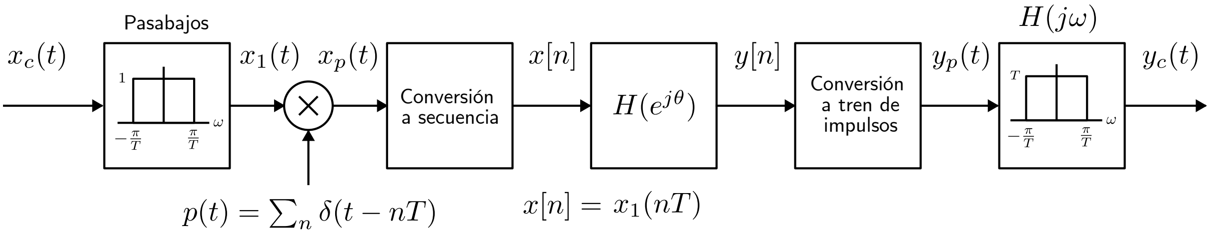


Figura 2: Procesamiento de señales de tiempo continuo.

(c) Si la entrada al sistema es $X_c(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$, dibujar el espectro en todos los puntos intermedios $X_1(j\omega)$, $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$, $Y_p(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$.

(d) Hallar la expresión analítica de la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema equivalente completo con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

Problema 3 [17 puntos]

Se cuenta con señal en tiempo discreto $x[n]$ correspondiente a una grabación digital de audio realizada con una frecuencia de muestreo de 16 kHz. La grabación fue realizada cerca de una máquina que introdujo una fuerte interferencia de un tono en 4 kHz y el micrófono usado tenía una respuesta muy pobre en bajas frecuencias, por lo que se buscará diseñar un filtro H que elimine las componentes en 4 kHz y amplifique las componentes de baja frecuencia respecto a las de alta frecuencia.

Para corregir la atenuación en bajas frecuencias, se considera el filtro H_1 SLIT causal con respuesta al impulso

$$h_1[n] = \alpha\,\delta[n] + (1 - 2\alpha)\,\delta[n-1] + \alpha\,\delta[n-2].$$

(a) Hallar la respuesta en frecuencia del filtro H_1. Bosquejar su módulo.

(b) Hallar α para que la ganancia en baja frecuencia (frecuencia nula) sea 4 veces mayor que la ganancia en altas frecuencias ($\theta = \pi$).

Para eliminar las componentes de frecuencia en 4 kHz, se propone el siguiente filtro (usualmente llamado filtro *notch*):

$$H_2(z) = \frac{(1 - e^{j\theta_1}z^{-1})(1 - e^{-j\theta_1}z^{-1})}{(1 - 0.95e^{j\theta_1}z^{-1})(1 - 0.95e^{-j\theta_1}z^{-1})}.$$

(c) Dibujar el diagrama de polos y ceros de H_2 para $\theta_1 = \pi/4$.

(d) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia para $\theta_1 = \pi/4$. Analizar el comportamiento del filtro.

(e) Indicar cuál debería ser el valor de θ_1 para eliminar las componentes correspondientes a 4 kHz.

(f) Dar un diagrama de bloques del filtro H que corresponda a aplicar ambos filtros H_1 y H_2 en cascada utilizando la menor cantidad posible de retardos.

Pregunta 1 [11 puntos]

Considerar una señal $x[n]$ de ancho de banda θ_0, y $p[n] = \sum_k \delta[n - kN_s]$ un tren de deltas de período N_s. Sea $x_p[n] = x[n]\,p[n]$.

(a) Mostrar que

$$P\left(e^{j\theta}\right) = \frac{2\pi}{N_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\theta - k\frac{2\pi}{N_s}\right).$$

Bosquejar $p[n]$ y $P\left(e^{j\theta}\right)$ con $N_s = 4$.

(b) Hallar una expresión para $X_p(e^{j\theta})$ en función de $X(e^{j\theta})$. Bosquejar $X_p(e^{j\theta})$; asumir un espectro triangular para X.

(c) Hallar la condición que deben cumplir N_s y θ_0 para que no exista solapamiento en $X_p(e^{j\theta})$.

(d) Dar las características (tipo, ganancia, y ancho de banda) del filtro que permite recuperar $x[n]$ a partir de $x_p[n]$.

Nota: Puede ser de utilidad la *fórmula de Poisson*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\alpha t} = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - k\frac{2\pi}{\alpha}\right).$$

Solución

Problema 1

(a) Con $k = 0$, el sistema es equivalente a $H(s)$ y por lo tanto se tendrá un polo con parte real negativa ($-a$).

(b) La transferencia resulta:

$$F(s) = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{as}{s^2 + as + ak}$$

(c) Para esto el discriminante del denominador deberá ser nulo:

$$\Delta = a^2 - 4ak = 0, \quad k_D = \frac{a}{4}$$

(d) Si $k > K_D$, el discriminante será negativo, por lo que el sistema tendrá dos polos complejos conjugados, cuya parte real será: $-\frac{a}{2}$.

(e) Tanto para $k = k_D$ como para $k > k_D$ el sistema tendrá polos con parte real negativa. Cuando $0 < k < k_D$, el discriminante será positivo por lo que el sistema presentará dos polos reales simples. Si $0 < k < k_D$:

$$\Delta < a^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} < a$$

Por lo que los polos del sistema serán ambos negativos.

(f) En este caso

$$F(s) = \frac{as}{(s + \frac{a}{2})^2} \Rightarrow f(t) = u(t)a\frac{d}{dt}[te^{-\frac{a}{2}t}]$$

(g)

$$E(s) = \frac{1}{1 + H(s)G(s)}$$

Como $sE(s)$ tiene los mismos polos que el sistema en lazo cerrado (el cual es estable para el rango de valores de k estudiados) se está bajo las hipótesis del teorema del valor final. Por lo tanto:

$$\lim_{t\to+\infty} e(t) = 0 = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0 \quad \forall k > 0$$

Problema 2

(a) Transformando los términos de la ecuación en diferencias se tiene:

$$H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta}$$

(b) La transferencia se puede escribir como

$$H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j\theta} = e^{-j\theta/2}(e^{j\theta/2} + e^{-j\theta/2})$$

Por lo tanto el módulo es:

$$|H(e^{j\theta})| = 2|\cos(\theta/2)|$$

(c)

(d)

$$H_c(j\omega) = (1 + e^{-j\omega T})\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi/T}\right)$$

Problema 3

(a)

$$H_1(e^{j\theta}) = \alpha + (1 - 2\alpha)e^{-j\theta} + \alpha e^{-j2\theta}$$

$$H_1(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}(\alpha e^{j\theta} + (1 - 2\alpha) + \alpha e^{-j\theta})$$

$$H_1(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}((1 - 2\alpha) + 2\alpha\cos(\theta))$$

$$|H_1(e^{j\theta})| = |(1 - 2\alpha) + 2\alpha\cos(\theta)|$$

(b) La ganancia en módulo en $\theta = 0$ es 1, y la ganancia en módulo en $\theta = \pi$ es $|1 - 4\alpha|$ Por lo que $|1 - 4\alpha| = 1/4$ entonces hay dos soluciones $\alpha = 3/16$ y $\alpha = 5/16$. Finalmente $\alpha = 3/16$ ya que corresponde a amplificar suavemente las bajas frecuencias que es lo que se indica que debe hacer el filtro H_1.

(c)

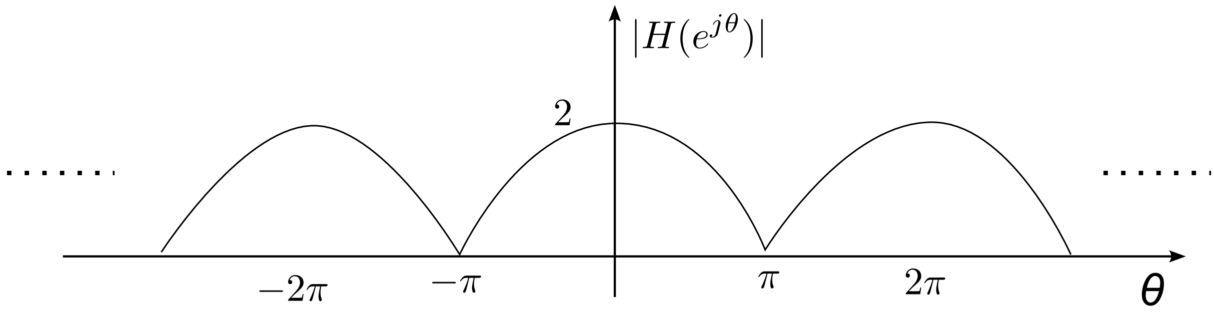
(d)

(e) La frecuencia de muestreo es 16 kHz, por lo que la frecuencia 4 kHz se mapeará a $2\pi * 4000/16000 = \pi/2$ El valor de θ_1 debería ser $\pi/2$, de manera que los ceros queden en $\pm j$. El filtro tendrá una respuesta casi plana salvo en $\pm\pi/2$

(f)

Pregunta 1

(a) Ver teórico.



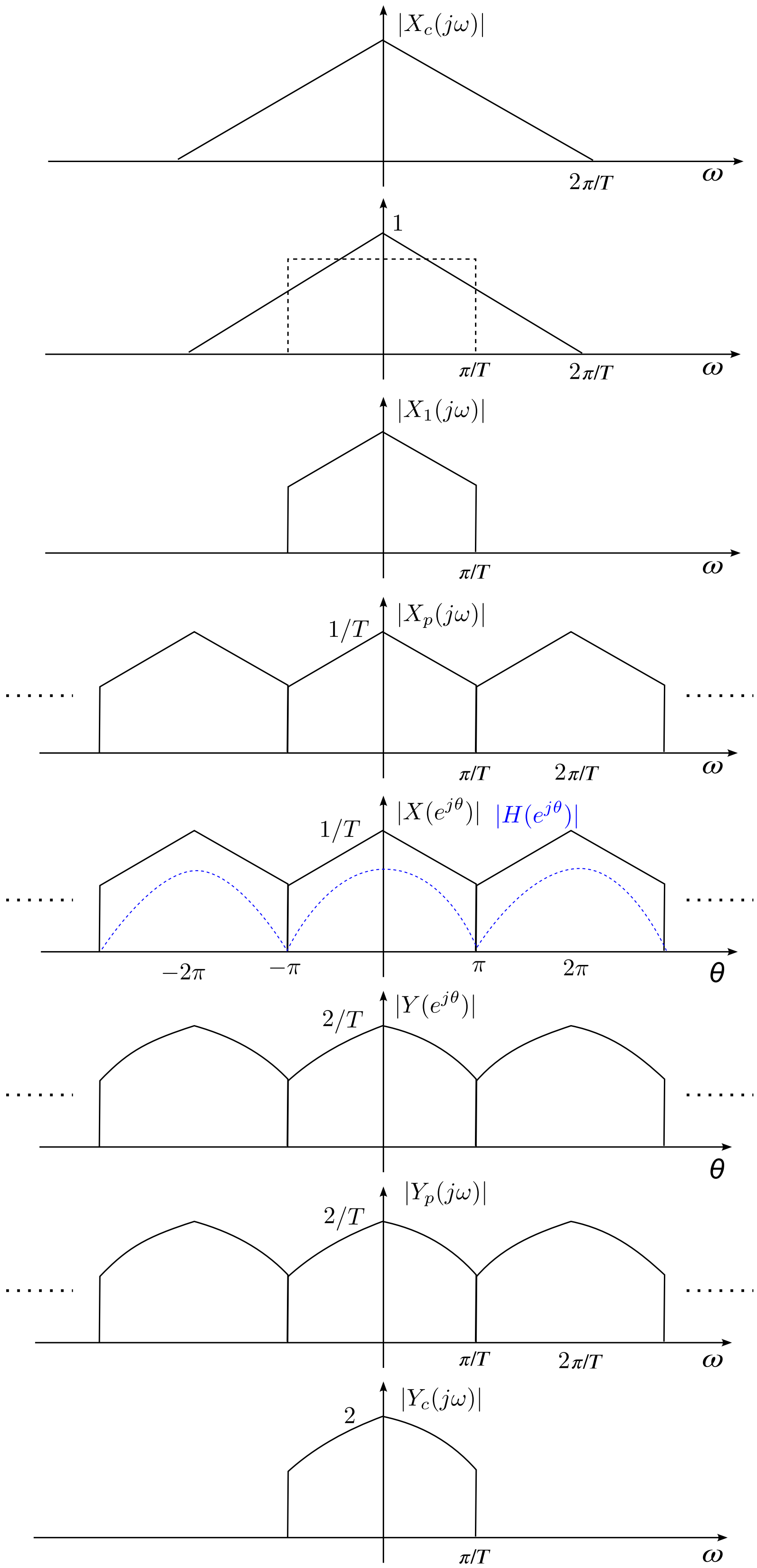
(b) Se llega a

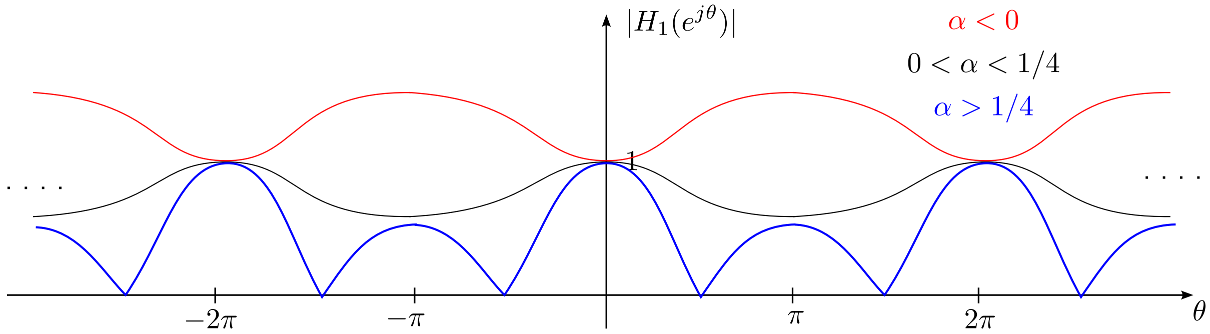
$$X_p\left(e^{j\theta}\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(e^{j(\theta - k\frac{2\pi}{N_s})}\right).$$

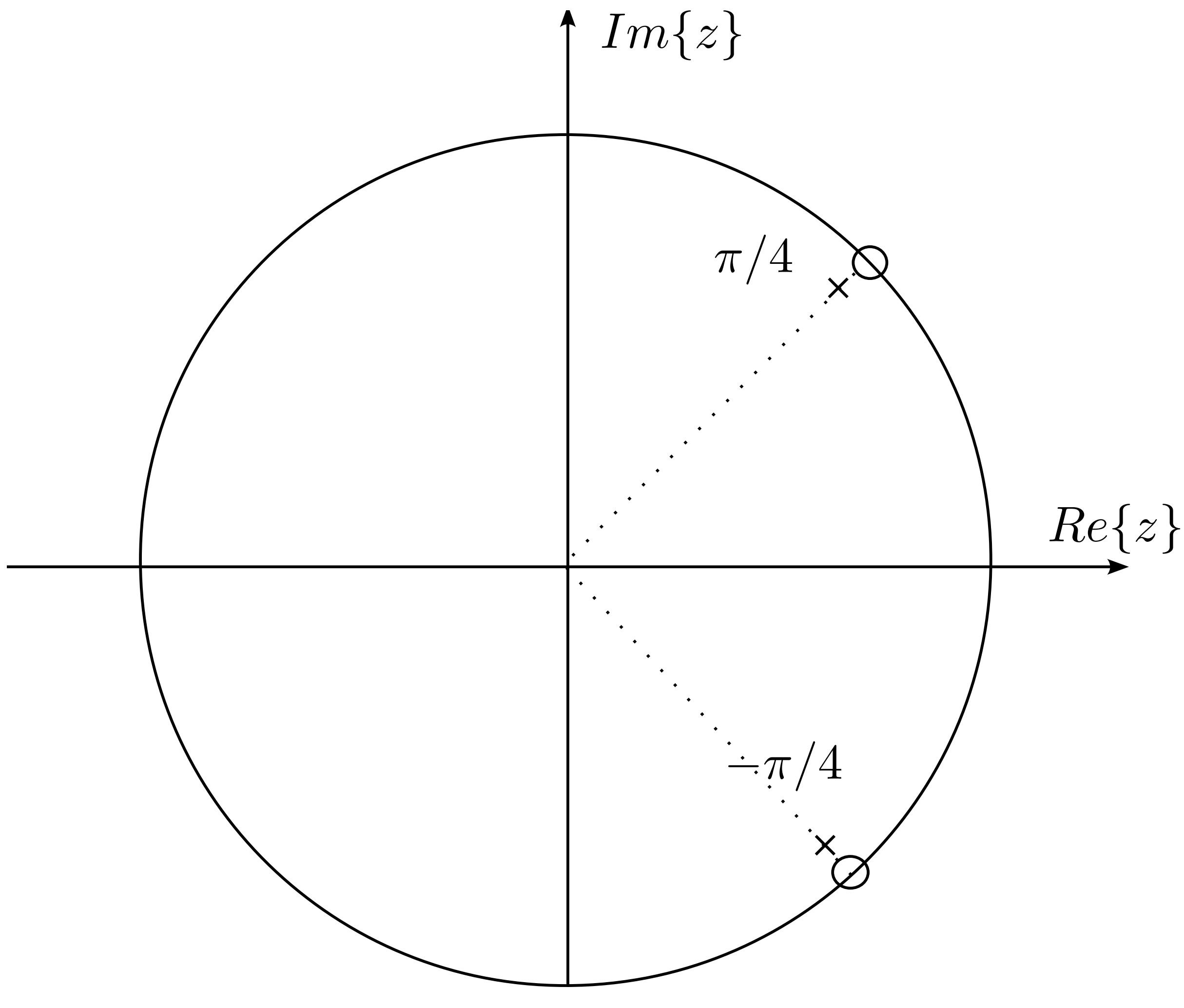
Ver teórico.

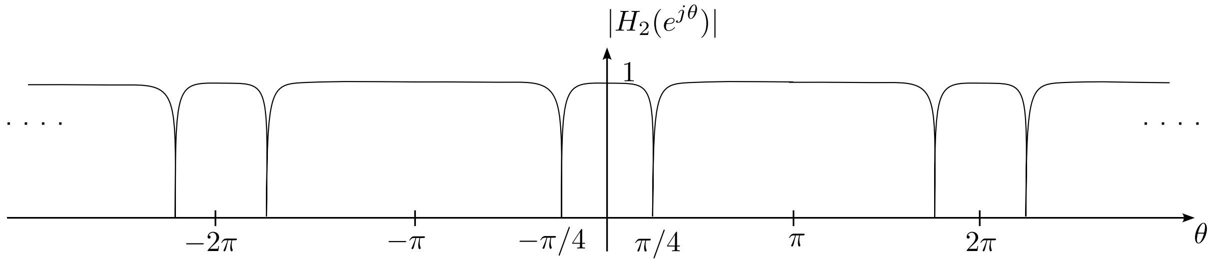
(c) $\frac{\pi}{N_s} < \theta_0$. Ver teórico.

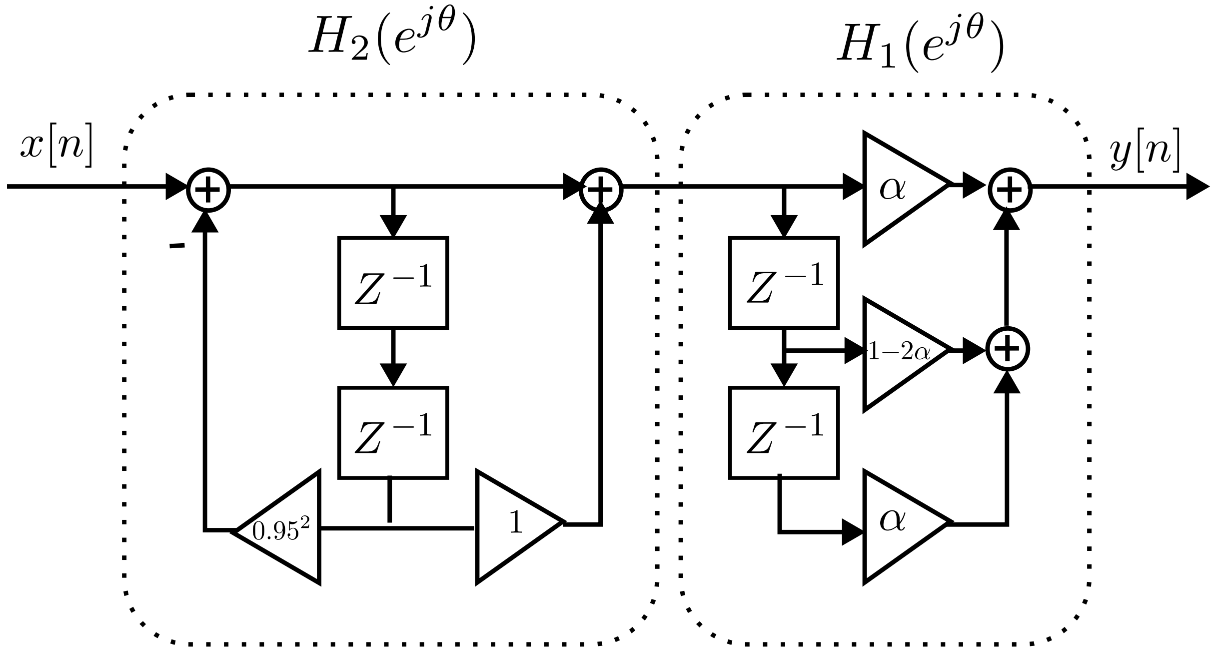
(d) Ver teórico.


$|X_c(j\omega)|$
$2\pi/T$
ω
1
π/T
$2\pi/T$
ω
$|X_1(j\omega)|$
π/T
ω
$1/T$
$|X_p(j\omega)|$
π/T
$2\pi/T$
ω
$1/T$
$|X(e^{j\theta})|$
$|H(e^{j\theta})|$
-2π
$-\pi$
π
2π
θ
$2/T$
$|Y(e^{j\theta})|$
θ
$2/T$
$|Y_p(j\omega)|$
π/T
$2\pi/T$
ω
2
$|Y_c(j\omega)|$
π/T
ω


$|H_1(e^{j\theta})|$
$\alpha < 0$
$0 < \alpha < 1/4$
$\alpha > 1/4$
1
-2π
$-\pi$
π
2π
θ


$Im\{z\}$
$Re\{z\}$
$\pi/4$
$-\pi/4$


$|H_2(e^{j\theta})|$
1
-2π
$-\pi$
$-\pi/4$
$\pi/4$
π
2π
θ


$H_2(e^{j\theta})$
$H_1(e^{j\theta})$
$x[n]$
$y[n]$
-
Z^{-1}
Z^{-1}
0.95^2
1
α
Z^{-1}
$1-2\alpha$
Z^{-1}
α