Señales y Sistemas

Primer parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

27 de abril de 2023

Indicaciones

- La prueba consiste en cuatro problemas.
- La prueba es individual y solamente se puede consultar la hoja de fórmulas oficial del curso.
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- La entrega del parcial consiste de dos partes. Primero, la entrega de las hojas utilizadas para la resolución de los ejercicios, convenientemente identificadas. Segundo, la entrega en el EVA de estas hojas digitalizadas como se explica a continuación.
- La entrega en el EVA del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Para esto tendrán 30 minutos extra a partir de las 15:30.
- La entrega en el EVA se realizará a través de la tarea (Parciales ▷ Entrega del Primer Parcial 2023) en el EVA de la asignatura.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y nímero de hoja.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción, siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería disponible en https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf.

Problema 1 [11 puntos]

(a) Definir las siguientes propiedades de los sistemas: (a) Linealidad, (b) Invarianza temporal, (c) Causalidad, (d) Estabilidad y (e) Memoria.

Un sistema mecánico masa-resorte-amortiguador es considerado como un SLIT causal, cuya entrada es la fuerza aplicada a la masa, $F(t)$, y la salida su posición, $x(t)$, mediante la siguiente ecuación diferencial

$$F(t) = \ddot{x}(t) + 11\dot{x}(t) + 10x(t).$$

(b) Calcular la transferencia del sistema, $H(j\omega)$.

(c) Sabeindo que $\mathcal{F}\{u(t)e^{-at}\} = \frac{1}{j\omega+a}$, calcular la respuesta al impulso, $h(t)$.

(d) Demostrar que este sistema es estable.

(e) Utilizando la respuesta al impulso, calcular la respuesta el escalón del sistema ($x(t)$ cuando la entrada es $F(t) = u(t)F_0$) para todo instante de tiempo.

(f) Si la fuerza aplicada es sinusoidal, de la forma

$$F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t).$$

Calcular el máximo apartamiento de la masa, x_{MAX} cuando el sistema se encuentra en régimen.

Problema 2 [9 puntos]

Un SLIT causal y estable queda representado por la siguiente ecuación en diferencias:
$y[n] = x[n] - x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$

(a) Hallar la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\theta})$.

(b) Hallar la respuesta al impulso del sistema $h[n]$.

(c) Demostrar que el sistema es estable.

(d) Hallar la salida $y_1[n]$ cuando la entrada es $x_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$.

Problema 3 [9 puntos]

Se considera la secuencia

$$x[n] = 0,25\delta[n] + 0,5\delta[n-1] + 0,25\delta[n-2].$$

(a) Calcular $X(e^{j\theta})$, la DTFT de x. Graficar su nódulo. Nota: puede ser útil considerar que $(1 + e^{-j2\theta})/2 = e^{-j\theta}\cos\theta$.

Se desea analizar el espectro de esta señal utilizando la DFT, para esto se considera la secuencia: $x_N[n] = (u[n] - u[n-N])\sum_m x[n-mN]$

(b) Calcular $X_3[k]$, la DFT de x_3 considerando $N = 3$.

(c) Mostrar que los valores obtenidos de la DFT corresponden a muestras de la DTFT.

Una forma de aumentar la resolución de la DFT consiste en agregar ceros al intervalo de análisis. Se desea aumentar al doble la resolución de muestras del espectro, para esto se toma $N = 6$.

(d) Mostrar que $x_6[n]$ resulta ser igual a $x_3[n]$ en el rango $[0, .., 2]$ y cero en el resto del intervalo de análisis de la DFT.

(e) Calcular la nueva DFT de x_6 correspondiente a $N = 6$. Graficar su módulo.

(f) Comparar y relacionar las gráficas de los espectros obtenidas.

Problema 4 [11 puntos]

Se desea transmitir dos señales $x_a(t)$ y $x_b(t)$ combinadas en una señal $x_T(t)$. Para combinar estas dos señales se realiza su modulación según el espectro $X_T(j\omega)$ de la figura 1 que corresponde a la CTFT de la señal $x_T(t)$.

(a) Mostrar que $X_T(j\omega)$ corresponde al espectro de

$$x_T(t) = x_a(t) + 2x_b(t)\cos(3\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t).$$

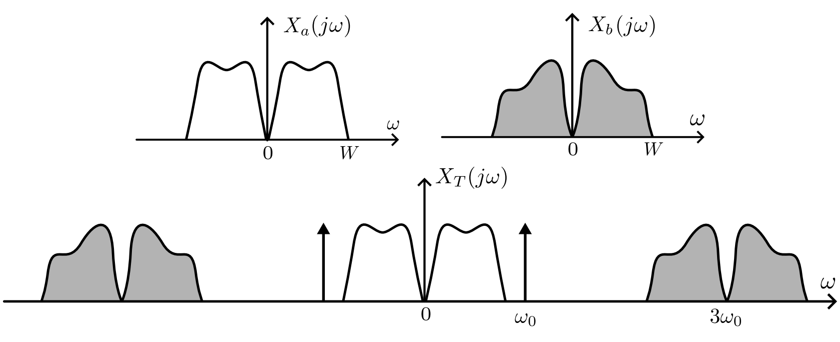

Figura 1: Espectros

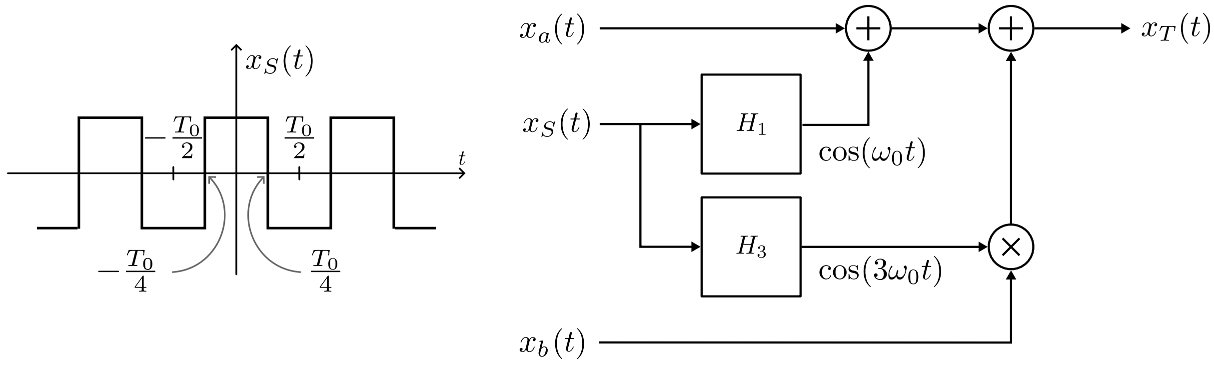

Figura 2: Sistema de modulación

(b) Sean P_a y P_b las potencias de $x_a(t)$ y $x_b(t)$ respectivamente. Hallar P_T la potencia de $x_T(t)$.

(c) ¿Qué relación debe cumplir entre W y ω_0 para que se pueda realizar la modulación planteada?

Considerar el sistema de la figura 2 que genera la señal $x_T(t)$ a partir de la señal auxiliar

$$x_S(t) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_0}{T_0/2}\right) - 1.$$

(d) Hallar $X_S(j\omega)$ la CTFT de la $x_S(t)$ en función de T_0.

(e) Bosquejar $X_S(j\omega)$.

(f) Dar las características del filtro $H_1(j\omega)$ (tipo, frecuencias relevantes, y ganancia) y la relación entre T_0 y ω_0 para que el resultado del filtrado de $x_S(t)$ con H_1 sea $\cos(\omega_0 T)$.

(g) Dar las características del filtro $H_3(j\omega)$ (tipo, frecuencias relevantes, y ganancia) con la relación entre T_0 y ω_0 hallada en la parte anterior para que el resultado del filtrado de $x_S(t)$ con H_3 sea $\cos(3\omega_0 T)$.