Señales y Sistemas

Primer parcial

Instituto de Ingenieía Eléctrica

30 de abril de 2022

Indicaciones

- La prueba consiste en cuatro problemas.
- La prueba es individual y solamente se puede consultar la hoja de fórmulas oficial del curso.
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, comenzando a las 12:00 y finalizando a las 15:30.
- La entrega del parcial consiste de dos partes. Primero, la entrega de las hojas utilizadas para la resolución de los ejercicios, convenientemente identificadas. Segundo, la entrega en el EVA de estas hojas digitalizadas como se explica a continuación.
- La entrega en el EVA del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Para esto tendrán 30 minutos extra a partir de las 15:30.
- La entrega en el EVA se realizará a travás de la tarea (Entrega del Primer Parcial 2022) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo al mail: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y nímero de hoja.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción, siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería disponible en https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf.

Problema 1 [10 puntos]

Considerar el SLIT causal H_α dado por la siguiente ecuación en diferencias de parámetro $\alpha \in (0,1)$,

$$y[n] = x[n] - x[n-2] - \alpha y[n-1].$$

(a) Hallar la respuesta en frecuencia $H_\alpha(e^{j\theta})$ asumiendo que el sistema es estable.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h_\alpha[n]$.

(c) Definir la estabilidad BIBO para un sistema en tiempo discreto.

(d) Dar la condición de estabilidad BIBO que debe cumplir la respuesta al impulso.

(e) Verificar que el sistema H_α es estable BIBO utilizando la condición de estabilidad definida en la parte anterior.

(f) Evaluar el módulo de la respuesta en frecuencia para las frecuencias $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi$. Indicar si el filtro es un pasabajos, pasabandas o pasaaltos.

Problema 2 [10 puntos]

El objetivo del siguiente estudio consiste en analizar un sistema que realiza la Transformada de Fourier para Tiempo Continuo, es decir, que para una entrada x, la salida será $y = \mathtt{CTFT}\{x\}$.
Considerar el sistema S definido de la siguiente manera, dada la entrada $x(t)$ la salida es

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)e^{-jrt}dr.$$

Linealidad.

(a) Definir la linealidad de un sistema.

(b) ¿El sistema S es lineal? Justificar detalladamente.

Invarianza temporal.

(c) Definir la invarianza temporal de un sistema.

(d) ¿El sistema S es invariante en el tiempo? Justificar detalladamente.

Causalidad.

(e) Definir la causalidad de un sistema.

(f) ¿El sistema S es causal? Justificar detalladamente.

Respuesta al impulso.

(g) Determinar la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema S.

Si $x(t) = u(t)e^{-ft}$ $f \in R;\ f > 0$:

(h) Calcular $y(t)$, utilizando la definición de S.

(i) Calcular $\tilde{y}(t) = x(t) * h(t)$, con el $h(t)$ calculado en (g).

(j) Comparar los resultados obtenidos para $y(t)$ y $\tilde{y}(t)$ en los dos casos anteriores y justificar el resultado de dicha comparación.

Problema 3 [10 puntos]

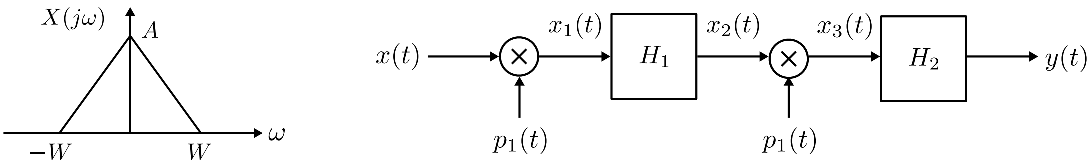


Figura 1: Sistema H1-H2

Considerar el sistema de la Figura 1 donde la señal de entrada $x(t)$ tiene espectro $X(j\omega) = A\,\Lambda(\omega/W)$, donde

- $p_1(t) = \cos(\omega_0 t)$ con $\omega_0 > W$,
- H_1 es un filtro pasabanda ideal con banda pasante entre ω_0 y $(\omega_0 + W)$,
- H_2 es un filtro a determinar.

(a) Calcular E_x, la energía de $x(t)$.

(b) Hallar una expresión para $X_1(j\omega)$ y $X_2(j\omega)$, en función de $X(j\omega)$.

(c) Calcular la relación entre E_x y la energía de $x_1(t)$.

(d) Bosquejar el módulo del espectro de $X_i(j\omega), i = 1, 2, 3$ y $Y(j\omega)$.

(e) Determinar las características del filtro H_2 (tipo, frecuencia(s) de corte(s), y ganancia) para que $y(t) = x(t)$.

Problema 4 [10 puntos]

Se desea analizar el comportamiento del sistema S_4 que muestra la Figura 2, cuando la entrada es

$$x[n] = 1 + \cos(\pi n/2) + (-1)^n$$

donde el filtro H_1 es un SLIT causal con respuesta al impulso $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

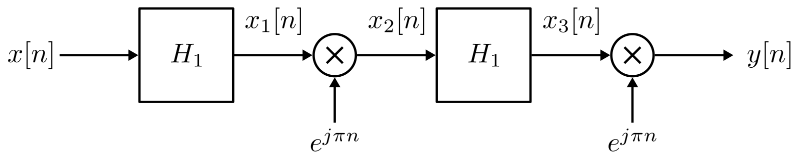


Figura 2: Sistema S_4

Para realizar el análisis, se pide:

(a) Hallar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de $x[n]$.

(b) Calcular la respuesta en frecuencia del filtro H_1 y bosquejar su módulo.

(c) Bosquejar el espectro de $x[n]$, $x_1[n]$, $x_2[n]$, $x_3[n]$, y $y[n]$. Justificar cada paso.

(d) Hallar $y[n]$.

Solución

Problema 1

(a)

$$Y(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) - X(e^{j\theta})e^{-j2\theta} - \alpha Y(e^{j\theta})e^{-j\theta}$$

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1 - e^{-j2\theta}}{1 + \alpha e^{-j\theta}}$$

(b) Antitrasnformando la respuesta en frecuencia se obtiene:

$$h[n] = (-\alpha)^n u[n] + (-\alpha)^{n-2} u[n-2].$$

(c) Un sistema es estable BIBO si para toda entrada acotada, la salida es acotada.

(d) La condición de estabilidad BIBO para la respuesta al impulso de sistemas en tiempo discreto es que $\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]|$ converje.

(e) En este caso el módulo de α es menor a 1 por lo que quedará una serie geométrica hacia más infinito que converge.

(f)

$$H(e^{j0}) = 0$$
$$|H(e^{j\pi/2})| = 2/\sqrt{\alpha^2 + 1}$$
$$H(e^{j\pi}) = 0$$

Problema 2

(a) Ver teórico.

(b) Si $y_1 = S\{x_1\}$ y $y_2 = S\{x_2\}$:

$$S\{a_1 x_1 + a_2 x_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [a_1 x_1(r) + a_2 x_2(r)] e^{-jrt} dr$$

$$= a_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(r) e^{-jrt} dr + a_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(r) e^{-jrt} dr = a_1 S\{x_1\} + a_2 S\{x_2\} = a_1 y_1 + a_2 y_2$$

Por lo tanto S SI es lineal.

(c) Ver teórico.

(d) Si se considera $x^*(t) = \mathrm{R}_T\{x\}(t) = x(t-T)$:

$$S\{x^*\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(r)e^{-jrt}dr = \int_{-\infty}^{+\infty} x(r-T)e^{-jrt}dr = \int_{-\infty}^{+\infty} x(z)e^{-j(z+T)t}dz$$

$$= e^{-jTt}\int_{-\infty}^{+\infty} x(z)e^{-jzt}dz = e^{-jTt}S\{x\}(t)$$

Por otro lado:

$$\mathrm{R}_T\{S\{x\}\}(t) = S\{x\}(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)e^{-jr(t-T)}dr$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)e^{jrT}e^{-jrt}dr = S\{x(t)e^{jtT}\}(t)$$

Por lo tanto: $\exists\, T,\ x \ /\ S\{\mathrm{R}_T\{x\}\} \neq \mathrm{R}_T\{S\{x\}\}$. Por este motivo S NO es invariante en el tiempo.

(e) Ver teórico.

(f) Para un tiempo $t_0 \in \mathrm{R}$ cualquiera:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)e^{-jrt_0}dr$$

, lo cual requiere conocer todos los valores de la entrada x (es decir, el valor de x para todo tiempo).
Por lo tanto, el sistema S NO es causal.

(g) Por definición:

$$h(t) = S\{\delta\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r)e^{-jrt}dr = 1\ \forall t$$

(h)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(r)e^{-fr}e^{-jrt}dr = \frac{1}{f+jt}u(t)$$

(i)

$$y(t) = \{x * h\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(r)h(t-r)dr = \frac{1}{k}u(t)$$

(j) Los resultados de las partes anteriores difieren entre sí. Esto es completamente esperable ya que el sistema NO es SLIT (si bien es lineal, no es invariante en el tiempo). Por lo tanto la respuesta al impulso NO caracteriza al sistema. Esto también implica que la respuesta correcta ante la entrada formulada sólo es la obtenida mediante la definición de S.

Problema 3

(a)

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X^2(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{W}\left[\frac{A}{W}\left(-\omega+W\right)\right]^2 d\omega = \frac{A^2W}{3\pi}$$

(b)

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2}\Big(X\big(j(\omega-2W)\big) + X\big(j(\omega+2W)\big)\Big)$$
$$X_2(j\omega) = X_1(j\omega)H_1(j\omega)$$

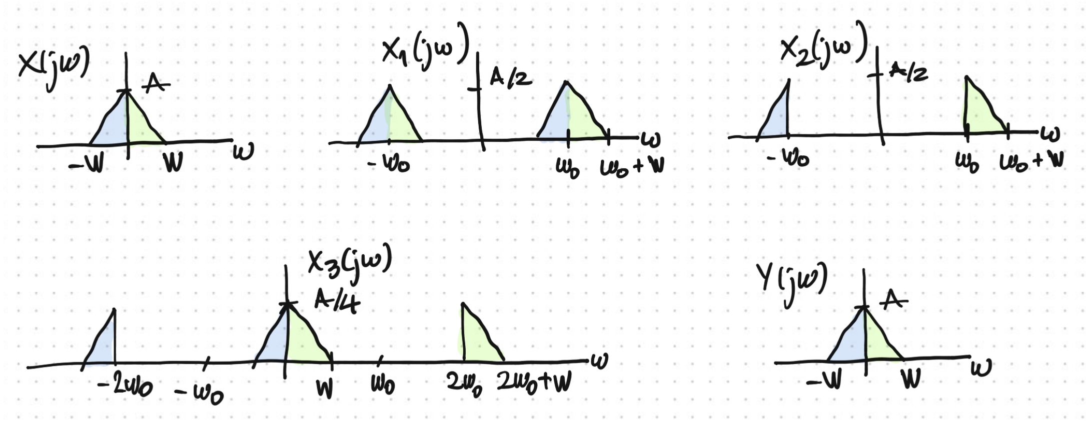


Figura 3: Espectros en los puntos de sistema H1-H2.

(c) La energía de x_1 es igual a la mitad de la energía de $x(t)$, $\frac{1}{2}E_x$.

(d) Ver Figura 3.

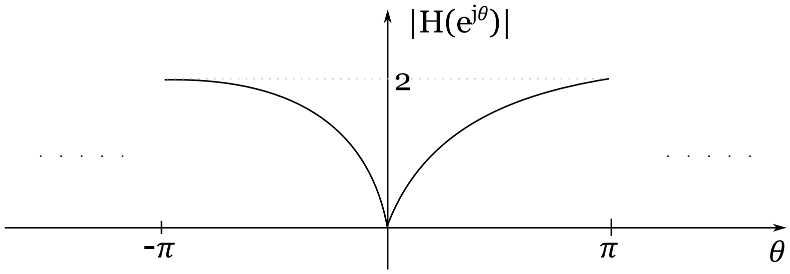
(e) Debe ser un filtro pasabajos de frecuencia de corte ω_0 y ganancia 4.

Problema 4

(a) La DTFT de $x[n]$ es:

$$X(e^{j\theta}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta\theta - 2\pi k + \delta\theta - pi - 2\pi k + \frac{1}{2}\delta\theta - pi/2 - 2\pi k + \frac{1}{2}\delta\theta + pi/2 - 2\pi k$$

(b) La respuesta en frecuencia de H_1 e:
$H_1(e^{j\theta}) = 1 - e^{-j\theta}$

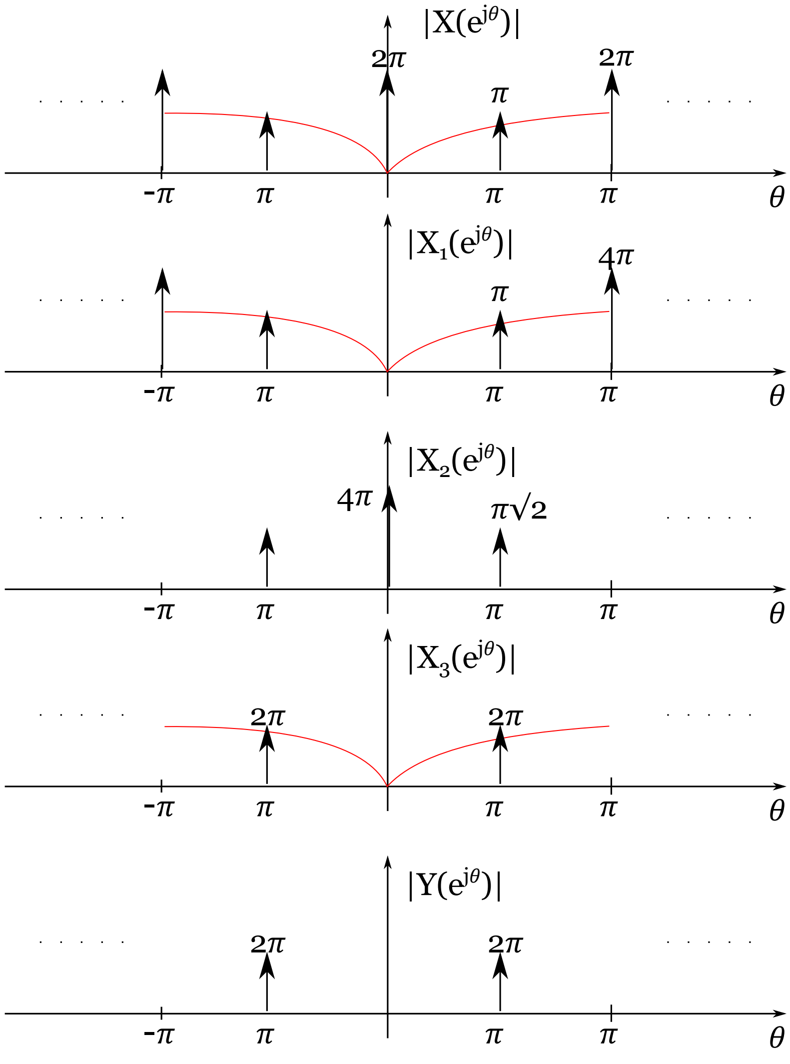


(c)

(d) Como se ve en los bosquejos, los únicos términos que sobreviven son los que corresponden a $\cos(\pi n/2)$. Evaluando el efecto del filtro sobre cada delta, considerando que el producto por -1^n lo que hace es intercambiar las posiciones de las deltas, se tiene que ambas quedan multiplicadas por:

$$(1 - e^{j\pi/2})(1 - e^{-j\pi/2})$$

como ambos términos con complejos conjugados, el efecto final es que quedan multiplicados por el cuadrado de su módulo, es decir, por un factor de 2.
Es decir que la salida $y[n] = 2\cos(\pi n/2)$


|X(e^jθ)|
2π
2π
π
-π π π π θ
|X1(e^jθ)|
4π
π
-π π π π θ
|X2(e^jθ)|
4π
π√2
-π π π π θ
|X3(e^jθ)|
2π
2π
-π π π π θ
|Y(e^jθ)|
2π
2π
-π π π π θ