Señales y Sistemas

Primer parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

4 de mayo de 2021

Indicaciones

- La prueba consistirá en cuatro problemas.
- La prueba es individual y no hay restricciones en la consulta de material.
- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media, comenzando a las 13:00 y finalizando a las 16:30. A partir de las 16:30 tendrán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica a continuación.
- La entrega del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos.
- La entrega se realizará a través de la tarea (**Entrega del Primer Parcial 2021** https://eva.fing.edu.uy/mod/assign/view.php?id=135593) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería disponible en https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo al mail: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas y el **Código de Parcial** que figura al final de estas indicaciones.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción, siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

NOMBRECOMPLETO (CI: CEDULAID), **Código de Parcial**: CODIGOPARCIAL

Problema 1 [11 puntos]

Un sistema de protección se encarga de apagar los discos duros de un servidor (los cuales se encuentran girando en su uso normal) cuando el movimiento del mismo es excesivo, evitando así la pérdida de datos. El sistema consiste en un microcontrolador que recibe datos de un acelerómetro (sistema encargado de medir datos de aceleración) los cuales son procesados para evaluar el movimiento.
Sea $x[n]$ los datos de aceleración recibidos por el microcontrolador y $y[n]$ los datos luego de ser procesados. El procesamiento de los datos de aceleración se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] + \alpha x[n-2]$$

con α y β reales.

(a) Hallar la respuesta al impulso del sistema, $h[n]$.

(b) Determinar si el sistema es: lineal, causal, invariante en el tiempo, con memoria y estable. Justificar detalladamente.

(c) Hallar la respuesta en frecuencia del sistema $H(e^{j\theta})$.

(d) Hallar los valores de α y β para que se cumpla que $H(e^{j0}) = 1$ y $H(e^{j\pi}) = 0$.

(e) Hallar y bosquejar la respuesta del sistema $y[n]$ ante la entrada $x[n] = Gu[n]$.

(f) Justificar si el resultado obtenido en la parte anterior es consistente con la respuesta en frecuencia del sistema.

Problema 2 [8 puntos]

Se considera la señal $x[n] = 1 + cos(\frac{\pi n}{4})$ cuando $0 \leq n \leq 7$.

(a) Calcular $X[k]$, la DFT de $x[n]$ aplicando la definición de la transformada con $N = 8$. Nota: puede ser útil utilizar la siguiente relación: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = 0$, si $k \neq 0$.

Sea $Y[k] = e^{-j\pi k}$ cuando $0 \leq k \leq 7$.

(b) Hallar y[n], la DFT inversa de $Y[k]$ aplicando la definición de la antitransformada con $N = 8$.

Sea $Z[k] = X[k].Y[k]$

(c) Hallar z[n], la DFT inversa de $Z[k]$.

(d) Graficar el módulo de $X[k]$ y de $Z[k]$.

Problema 3 [11 puntos]

Sea el siguiente sistema de segundo orden

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

(a) Determinar la condición que debe cumplir ζ para que la transferencia tenga dos polos reales. Justificar.

El circuito de la figura 1 tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{2R^2C^2s^2 + 4RCs + 1} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

(b) Obtener el valor de ζ para el circuito de la figura 1, y comprobar que se cumple la condición de la parte a.

(c) Calcular y bosquejar la respuesta al impulso. En el bosquejo se deben indicar los valores de la respuesta en $t < 0$, en $t = 0$ y el valor de la asíntota para $t \to \infty$.

(d) A partir de la parte anterior, determinar si el circuito es estable.

(e) Obtener las salidas $y_1(t),\ y_2(t)$, e $y_3(t)$ (bosquejando $y_3(t)$) cuando la entradas son

$$x_1(t) = e^{jt/RC},\ x_2(t) = e^{-jt/RC},\ x_3(t) = \cos(t/RC).$$

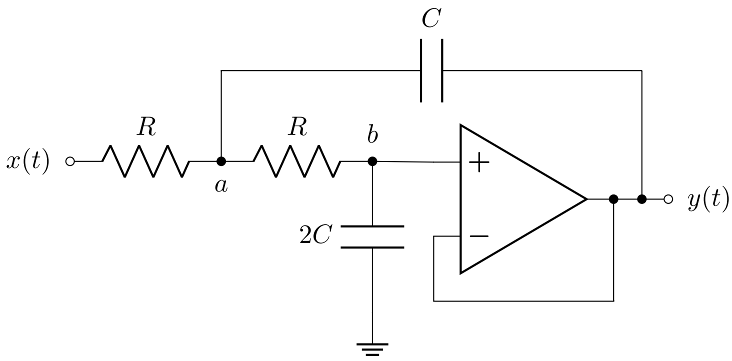

Figura 1: circuito RRC2C

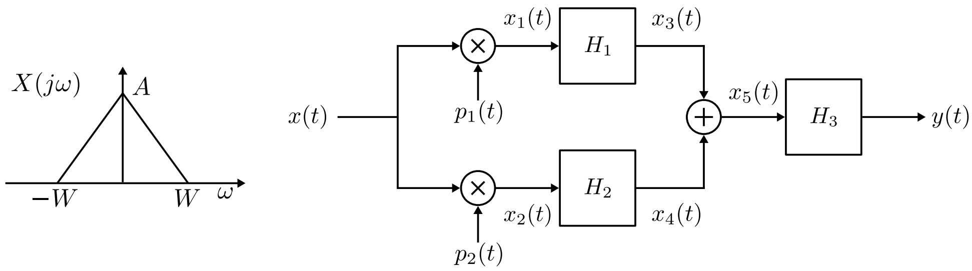

Figura 2: Sistema H1-H2-H3

Problema 4 [10 puntos]

Considerar el sistema de la figura 2 donde la señal de entrada $x(t)$ tiene espectro $X(j\omega) = A\,\Lambda(^{\omega}/_{W})$,

- $p_1(t) = \cos(Wt)$,
- $p_2(t) = \cos(3Wt)$,
- H_1 es un filtro pasaaltos ideal de frecuencia de corte $\omega_1 = W$,
- H_2 es un filtro pasaaltos ideal de frecuencia de corte $\omega_2 = 3W$, y
- H_3 es un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\omega_3 = 2W$.

(a) Calcular E_x, la energía de $x(t)$.

(b) Hallar una expresión para $X_1(j\omega)$ y $X_3(j\omega)$, en función de $X(j\omega)$.

(c) Calcular la relación entre E_x y la energía de $x_1(t)$.

(d) Bosquejar el módulo del espectro de $X_i(j\omega), i = 1, 2, 3, 4, 5$ y $Y(j\omega)$.

Solución

Problema 1

(a) Si la entrada es $x[n] = \delta[n] \Rightarrow h[n] = y[n] = \alpha\delta[n] + \beta\delta[n-1] + \alpha\delta[n-2]$

(b) El sistema: SI es lineal, SI es causal, SI es invariante en el tiempo, SI es con memoria y SI es estable.

(c) La respuesta en frecuencia del sistema es:

$$H(e^{j\theta}) = \alpha + \beta e^{-j\theta} + \alpha e^{-2j\theta} = e^{-j\theta}\left[\alpha e^{j\theta} + \beta + \alpha e^{-j\theta}\right] = e^{-j\theta}\left[\beta + 2\alpha\cos(\theta)\right]$$

(d) $H(e^{j0}) = \beta + 2\alpha = 1$, $H(e^{j\pi}) = \beta - 2\alpha = 0$, entonces:

$$\beta = 1/2 \;\; \alpha = 1/4$$

(e)

$$y[n] = 0 \, \forall n < 0$$
$$y[0] = G/4$$
$$y[1] = 3G/4$$
$$y[n] = G \, \forall n > 1$$

(f) El resultado es consistente ya que la respuesta del sistema en bajas frecuencias es 1:

$$X(e^{j\theta}) = 2\pi G \sum_k \delta(\theta - 2k\pi)$$

$$Y(e^{j\theta}) = H(e^{j\theta})X(e^{j\theta}) =$$
$$2\pi G \sum_k H(e^{j2k\pi}) \times \delta(\theta - 2k\pi) = 2\pi G \sum_k 1 \times \delta(\theta - 2k\pi) = X(e^{j\theta})$$

Problema 2

(a) Podemos escribir $x[n]$ como: $x[n] = 1 + 0.5e^{j2\pi n/N} + 0.5e^{-j2\pi n/N}$
Aplicando la definición de la transformada y utilizando $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = 0$, si $k \neq 0$ se puede ver que los únicos términos que no se anulan son: $X[0] = N$, $X[1] = 0.5N$ y $X[7] = 0.5N$

(b) Aplicando la definición de la inversa de la DFT y utilizando que $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi n}{N}k} = 0$, si $n \neq 0$ se puede ver que el único término que no se anula es: $y[N/2] = y[4] = 1$.

(c) El producto en el dominio de la DFT corresponde a la convoución circular en el domino del tiempo. Por lo tanto el resultado es un corrimiento circular de $x[n]$ que se puede escribir simplemente como un corrimiento dado que tanto la función constante y como $cos(\frac{2\pi n}{8})$ son funciones periódicas con período 2π
$z[n] = 1 + cos(\frac{2\pi[n-4]}{8})$ cuando $0 \leq n \leq 7$.
$z[n] = 1 + cos(\frac{\pi n}{4} - \pi) = 1 - cos(\frac{\pi n}{4})$ cuando $0 \leq n \leq 7$.

(d) El módulo de $X[k]$ y de $Z[k]$ vale: $Z[0] = X[0] = N$, $Z[1] = X[1] = N/2$, $Z[7] = X[7] = N/2$ y cero en otro caso

Problema 3

(a)

$$p = -\omega_0(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \ \Rightarrow \ \zeta > 1$$

(b)

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2R^2C^2}$$
$$\zeta = \sqrt{2}$$

(c)

$$p = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2R^2C^2}}$$
$$h(t) = \frac{u(t)}{2R^2C^2}\left(e^{\frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{2R^2C^2}}t} + e^{\frac{-2-\sqrt{3}}{\sqrt{2R^2C^2}}t}\right)$$

(d) Si, por ser absolutamente integrable

(e)

$$H(j/RC) = \frac{1}{-2+4j+1}$$
$$H(-j/RC) = \frac{1}{-2-4j+1}$$
$$y_1(t) = \frac{1}{-2+4j+1}e^{jt/RC}$$
$$y_2(t) = \frac{1}{-2-4j+1}e^{-jt/RC}$$
$$y_3(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2+4j+1}e^{jt/RC} + \frac{1}{-2-4j+1}e^{-jt/RC}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}\cos\left(t/RC - \arctan(4)\right)$$

Problema 4

(a)

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} X^2(j\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^W \left[\frac{A}{W}(-\omega + W)\right]^2 d\omega = \frac{A^2W}{3\pi}$$

(b) Mutación 1

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2}\Big(X\big(j(\omega-2W)\big) + X\big(j(\omega+2W)\big)\Big)$$
$$X_2(j\omega) = X_1(j\omega)H_1(j\omega))$$

(c) La energía de x_1 es igual a la mitad de la energía de $x(t)$, $\frac{1}{2}E_x$.

(d) Ver figura 3. Mutación 1

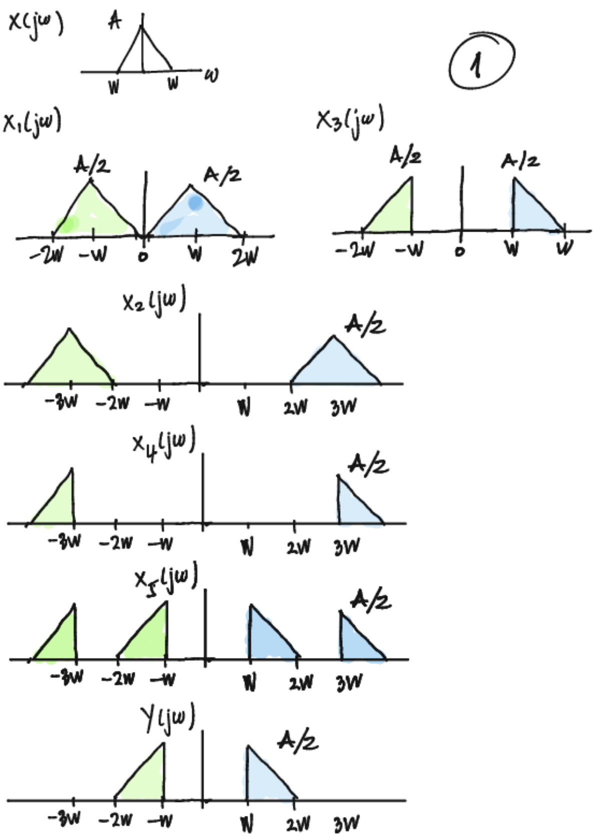

Figura 3: Solución Mutación 1.