

# Señales y Sistemas

## Segundo parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

24 de julio de 2020

### Indicaciones

- ⊗ La prueba consiste en cuatro problemas.
- ⊗ La prueba es **individual** y **no hay restricciones** en la consulta de material.
- ⊗ La prueba tiene una duración total de tres horas y media, comenzando a las 9:00 y finalizando a las 12:30. A partir de las 12:30 tendrán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- ⊗ La entrega del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos.
- ⊗ La entrega se realizará a través de la tarea (**Entrega Segundo Parcial**, <https://eva.fing.edu.uy/mod/assign/view.php?id=112398>) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- ⊗ Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería disponible en [https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral\\_0.pdf](https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf).
- ⊗ En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo al mail: [seys.ie.fing.udelar@gmail.com](mailto:seys.ie.fing.udelar@gmail.com). En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de su preferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email [seys.ie.fing.udelar@gmail.com](mailto:seys.ie.fing.udelar@gmail.com) y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- ⊗ Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas y el **Código de Parcial** que figura al final de estas indicaciones.
- ⊗ Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- ⊗ Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción, siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

NOMBRECOMPLETO (CI: CEDULAID), **Código de Parcial**: CODIGOPARCIAL

### Problema 1 [15 puntos]

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0\omega_A \frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100} y(t)$$

donde  $x(t)$  es la entrada,  $y(t)$  la salida y se cumple que:  $-1 < \zeta_0 < 1$ ,  $-1 < \zeta_1 < 1$  y  $\omega_A > 0$ ,

- (a) Hallar la transferencia del sistema,  $H(s)$ .
- (b) Demostrar que el módulo de los ceros y de los polos de  $H(s)$  es  $\omega_A$  y  $\frac{\omega_A}{10}$  respectivamente.
- (c) Hallar condiciones en los parámetros  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  y  $\omega_A$  para que se cumplan las siguientes condiciones:

- Que el sistema sea BIBO estable.
- La ganancia del sistema a la frecuencia  $\omega_C = 100 \frac{rad}{s}$  sea nula.

(d) Hallar la respuesta en régimen del sistema ante una entrada escalón (es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  si  $x(t) = u(t)$ ).

## Problema 2 [15 puntos]

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0\omega_A \frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100} y(t)$$

donde  $x(t)$  es la entrada,  $y(t)$  la salida y se cumple que:  $-1 < \zeta_0 < 1$ ,  $-1 < \zeta_1 < 1$  y  $\omega_A > 0$ ,

- Hallar la transferencia del sistema,  $H(s)$ .
- Demostrar que el módulo de los ceros y de los polos de  $H(s)$  es  $\omega_A$  y  $\frac{\omega_A}{10}$  respectivamente.
- Hallar condiciones en los parámetros  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  y  $\omega_A$  para que se cumplan las siguientes condiciones:
  - Que el sistema sea BIBO estable.
  - Los ceros del sistema tengan fase (en valor absoluto) menor a  $\frac{\pi}{2}$ .
- Hallar la respuesta en régimen del sistema ante una entrada escalón (es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  si  $x(t) = u(t)$ ).

## Problema 3 [15 puntos]

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0\omega_A \frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100} y(t)$$

donde  $x(t)$  es la entrada,  $y(t)$  la salida y se cumple que:  $-1 < \zeta_0 < 1$ ,  $-1 < \zeta_1 < 1$  y  $\omega_A > 0$ ,

- Hallar la transferencia del sistema,  $H(s)$ .
- Demostrar que el módulo de los ceros y de los polos de  $H(s)$  es  $\omega_A$  y  $\frac{\omega_A}{10}$  respectivamente.
- Hallar condiciones en los parámetros  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  y  $\omega_A$  para que se cumplan las siguientes condiciones:
  - Que el sistema sea BIBO estable.
  - Que la ganancia en continua sea 100.
  - Que los ceros del sistema tengan parte real negativa.
- Hallar la respuesta en régimen del sistema ante una entrada escalón (es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  si  $x(t) = u(t)$ ).

## Problema 4 [15 puntos]

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

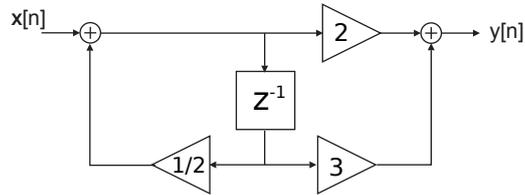
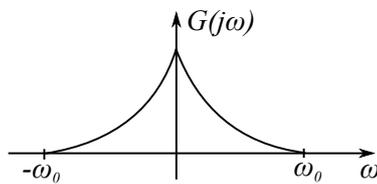
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0\omega_A \frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100} y(t)$$

donde  $x(t)$  es la entrada,  $y(t)$  la salida y se cumple que:  $-1 < \zeta_0 < 1$ ,  $-1 < \zeta_1 < 1$  y  $\omega_A > 0$ ,

- Hallar la transferencia del sistema,  $H(s)$ .
- Demostrar que el módulo de los ceros y de los polos de  $H(s)$  es  $\omega_A$  y  $\frac{\omega_A}{10}$  respectivamente.
- Hallar condiciones en los parámetros  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  y  $\omega_A$  para que se cumplan las siguientes condiciones:
  - Que el sistema sea BIBO estable.
  - Que los polos tengan parte real (en valor absoluto) mayor a  $10 \frac{rad}{s}$ .
  - Que los ceros del sistema tengan parte real negativa.
- Hallar la respuesta en régimen del sistema ante una entrada escalón (es decir,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$  si  $x(t) = u(t)$ ).

### Problema 5 [15 puntos]

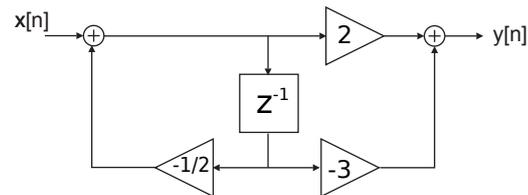
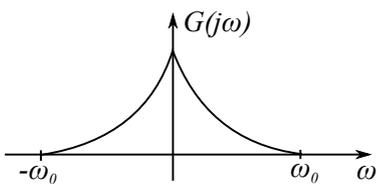
La señal de tiempo continuo  $x(t) = \cos(\omega_0 t)g(t)$ , donde  $\omega_0 = 2\pi 500 \frac{rad}{s}$  es muestreada y luego procesada en tiempo discreto con el sistema SLIT causal de la figura. El espectro de  $g(t)$  se muestra en la figura.



- Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x[n]$ .
- Hallar la transferencia del sistema  $H(z)$ .
- Realizar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.
- Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\theta})|$ .
- Estudiar la estabilidad del sistema.

### Problema 6 [15 puntos]

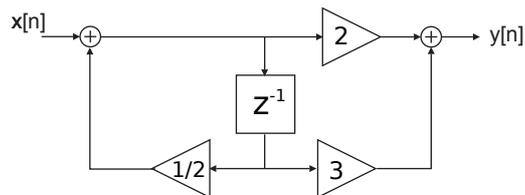
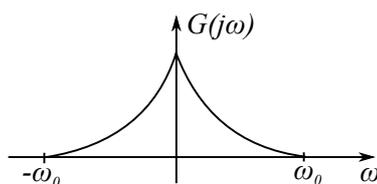
La señal de tiempo continuo  $x(t) = \cos(\omega_0 t)g(t)$ , donde  $\omega_0 = 2\pi 500 \frac{rad}{s}$  es muestreada y luego procesada en tiempo discreto con el sistema SLIT causal de la figura. El espectro de  $g(t)$  se muestra en la figura.



- Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x[n]$ .
- Hallar la transferencia del sistema  $H(z)$ .
- Realizar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.
- Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\theta})|$ .
- Estudiar la estabilidad del sistema.

### Problema 7 [15 puntos]

La señal de tiempo continuo  $x(t) = \cos(\omega_0 t)g(t)$ , donde  $\omega_0 = 2\pi 600 \frac{rad}{s}$  es muestreada y luego procesada en tiempo discreto con el sistema SLIT causal de la figura. El espectro de  $g(t)$  se muestra en la figura.

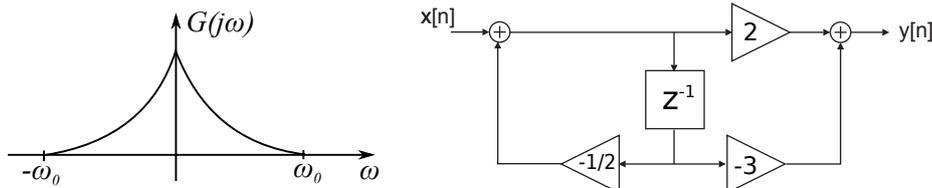


- Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x[n]$ .

- (b) Hallar la transferencia del sistema  $H(z)$ .
- (c) Realizar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.
- (d) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\theta})|$ .
- (e) Estudiar la estabilidad del sistema.

### Problema 8 [15 puntos]

La señal de tiempo continuo  $x(t) = \cos(\omega_0 t)g(t)$ , donde  $\omega_0 = 2\pi 600 \frac{rad}{s}$  es muestreada y luego procesada en tiempo discreto con el sistema SLIT causal de la figura. El espectro de  $g(t)$  se muestra en la figura.



- (a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x[n]$ .
- (b) Hallar la transferencia del sistema  $H(z)$ .
- (c) Realizar el diagrama de polos y ceros. Indicar la región de convergencia.
- (d) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia  $|H(e^{j\theta})|$ .
- (e) Estudiar la estabilidad del sistema.

### Problema 9 [15 puntos]

Sea el SLIT causal dado por la transferencia en lazo abierto en Laplace

$$H(s) = \frac{s + 1}{5s^2 - 30s + 90}$$

- (a) Hallar la transferencia del sistema en lazo cerrado, con ganancia  $K > 0$  en el lazo de realimentación según se muestra en la figura 1.
- (b) Hallar el valor de  $K > 0$  tal que la respuesta al escalón tiene un polo doble.
- (c) Para el valor de  $K$  hallado en la parte anterior, realizar el diagrama de ceros y polos del sistema en lazo cerrado. Indicar la región de convergencia.
- (d) Indicar si el sistema en lazo cerrado es estable, y en caso afirmativo bosquejar el módulo de su respuesta en frecuencia a partir del diagrama de la parte anterior.

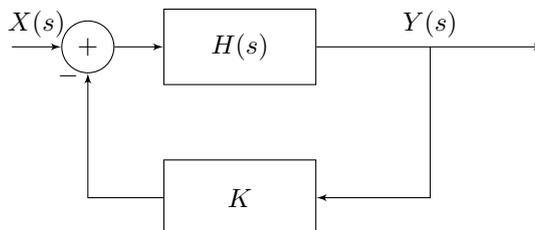


Figura 1: Sistema en lazo cerrado.

## Problema 10 [15 puntos]

Sea el SLIT causal dado por la transferencia en lazo abierto en Laplace

$$H(s) = \frac{s + 2}{4s^2 - 16s + 52}$$

- Hallar la transferencia del sistema en lazo cerrado, con ganancia  $K > 0$  en el lazo de realimentación según se muestra en la figura 1.
- Hallar el valor de  $K > 0$  tal que la respuesta al escalón tiene un polo doble.
- Para el valor de  $K$  hallado en la parte anterior, realizar el diagrama de ceros y polos del sistema en lazo cerrado. Indicar la región de convergencia.
- Indicar si el sistema en lazo cerrado es estable, y en caso afirmativo bosquejar el módulo de su respuesta en frecuencia a partir del diagrama de la parte anterior.

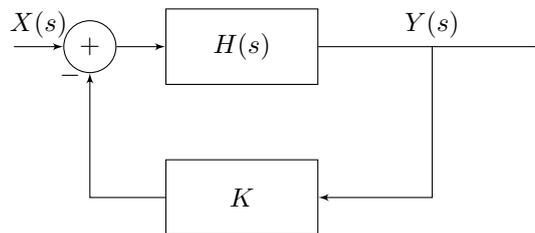


Figura 2: Sistema en lazo cerrado.

## Problema 11 [15 puntos]

Sea el SLIT causal dado por la transferencia en lazo abierto en Laplace

$$H(s) = \frac{s + 3}{6s^2 - 12s + 60}$$

- Hallar la transferencia del sistema en lazo cerrado, con ganancia  $K > 0$  en el lazo de realimentación según se muestra en la figura 1.
- Hallar el valor de  $K > 0$  tal que la respuesta al escalón tiene un polo doble.
- Para el valor de  $K$  hallado en la parte anterior, realizar el diagrama de ceros y polos del sistema en lazo cerrado. Indicar la región de convergencia.
- Indicar si el sistema en lazo cerrado es estable, y en caso afirmativo bosquejar el módulo de su respuesta en frecuencia a partir del diagrama de la parte anterior.

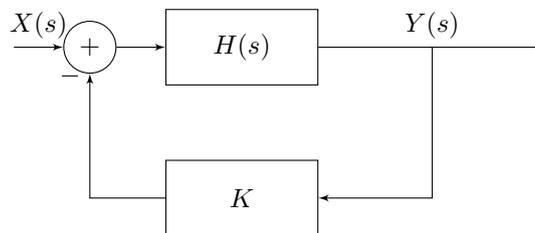


Figura 3: Sistema en lazo cerrado.

## Problema 12 [15 puntos]

Sea el SLIT causal dado por la transferencia en lazo abierto en Laplace

$$H(s) = \frac{s + 4}{2s^2 - 16s + 104}$$

- Hallar la transferencia del sistema en lazo cerrado, con ganancia  $K > 0$  en el lazo de realimentación según se muestra en la figura 1.
- Hallar el valor de  $K > 0$  tal que la respuesta al escalón tiene un polo doble.
- Para el valor de  $K$  hallado en la parte anterior, realizar el diagrama de ceros y polos del sistema en lazo cerrado. Indicar la región de convergencia.
- Indicar si el sistema en lazo cerrado es estable, y en caso afirmativo bosquejar el módulo de su respuesta en frecuencia a partir del diagrama de la parte anterior.

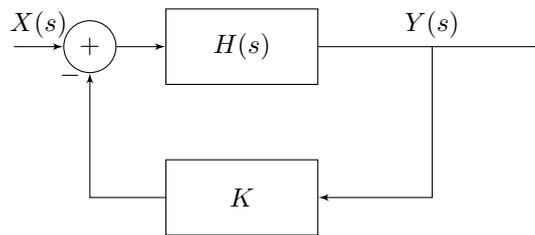
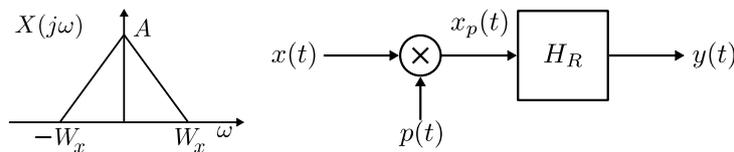


Figura 4: Sistema en lazo cerrado.

## Problema 13 [15 puntos]

Sea  $x(t)$  una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito  $W_x$ . Sea  $x_d[n]$  la señal de tiempo discreto (secuencia) correspondiente a muestrear  $x(t)$  con período de muestreo  $T_s$ , es decir  $x_d[n] = x(nT_s)$ . Considerar el proceso conceptual de muestreo dado por la siguiente figura, donde  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$  es un tren de impulsos de período  $T_s$  y  $H_R$  es un filtro reconstructor ideal.



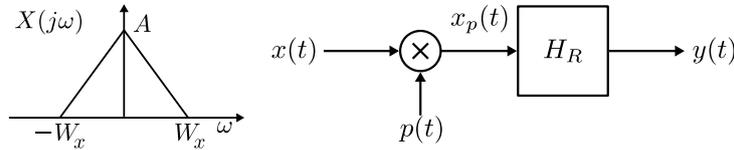
- Hallar el máximo tiempo de muestreo  $T_N$  que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x_d[n]$ .
- Hallar una expresión para  $X_p(jw)$  y bosquejarlo en función de  $X(jw)$ . Discutir las opciones según la relación entre  $T_s$  y  $T_N$ .
- Demostrar la relación  $X_p(jw) = X_d(e^{jwT_s})$ .

Considerar dos tiempos de muestreo diferentes  $T_1 = \alpha_1 T_N$  y  $T_2 = \alpha_2 T_N$  que dan lugar a secuencia  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente.

- Bosquejar los espectros de  $X_1(e^{j\theta})$  y  $X_2(e^{j\theta})$  en el caso de  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 1/2$ , marcando los puntos de interés en  $\theta$ .

### Problema 14 [15 puntos]

Sea  $x(t)$  una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito  $W_x$ . Sea  $x_d[n]$  la señal de tiempo discreto (secuencia) correspondiente a muestrear  $x(t)$  con período de muestreo  $T_s$ , es decir  $x_d[n] = x(nT_s)$ . Considerar el proceso conceptual de muestreo dado por la siguiente figura, donde  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$  es un tren de impulsos de período  $T_s$  y  $H_R$  es un filtro reconstructor ideal.



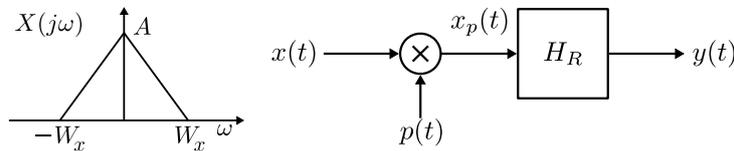
- Hallar el máximo tiempo de muestreo  $T_N$  que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x_d[n]$ .
- Hallar una expresión para  $X_p(j\omega)$  y bosquejarlo en función de  $X(j\omega)$ . Discutir las opciones según la relación entre  $T_s$  y  $T_N$ .
- Demstrar la relación  $X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T_s})$ .

Considerar dos tiempos de muestreo diferentes  $T_1 = \alpha_1 T_N$  y  $T_2 = \alpha_2 T_N$  que dan lugar a secuencia  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente.

- Bosquejar los espectros de  $X_1(e^{j\theta})$  y  $X_2(e^{j\theta})$  en el caso de  $\alpha_1 = 3$  y  $\alpha_2 = 1/3$ , marcando los puntos de interés en  $\theta$ .

### Problema 15 [15 puntos]

Sea  $x(t)$  una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito  $W_x$ . Sea  $x_d[n]$  la señal de tiempo discreto (secuencia) correspondiente a muestrear  $x(t)$  con período de muestreo  $T_s$ , es decir  $x_d[n] = x(nT_s)$ . Considerar el proceso conceptual de muestreo dado por la siguiente figura, donde  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$  es un tren de impulsos de período  $T_s$  y  $H_R$  es un filtro reconstructor ideal.



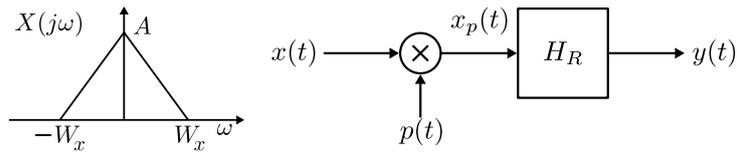
- Hallar el máximo tiempo de muestreo  $T_N$  que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x_d[n]$ .
- Hallar una expresión para  $X_p(j\omega)$  y bosquejarlo en función de  $X(j\omega)$ . Discutir las opciones según la relación entre  $T_s$  y  $T_N$ .
- Demstrar la relación  $X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T_s})$ .

Considerar dos tiempos de muestreo diferentes  $T_1 = \alpha_1 T_N$  y  $T_2 = \alpha_2 T_N$  que dan lugar a secuencia  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente.

- Bosquejar los espectros de  $X_1(e^{j\theta})$  y  $X_2(e^{j\theta})$  en el caso de  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 1/3$ , marcando los puntos de interés en  $\theta$ .

### Problema 16 [15 puntos]

Sea  $x(t)$  una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito  $W_x$ . Sea  $x_d[n]$  la señal de tiempo discreto (secuencia) correspondiente a muestrear  $x(t)$  con período de muestreo  $T_s$ , es decir  $x_d[n] = x(nT_s)$ . Considerar el proceso conceptual de muestreo dado por la siguiente figura, donde  $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$  es un tren de impulsos de período  $T_s$  y  $H_R$  es un filtro reconstructor ideal.



- Hallar el máximo tiempo de muestreo  $T_N$  que permite recuperar unívocamente la señal  $x(t)$  a partir de sus muestras  $x_d[n]$ .
- Hallar una expresión para  $X_p(j\omega)$  y bosquejarlo en función de  $X(j\omega)$ . Discutir las opciones según la relación entre  $T_s$  y  $T_N$ .
- Demstrar la relación  $X_p(j\omega) = X_d(e^{j\omega T_s})$ .

Considerar dos tiempos de muestreo diferentes  $T_1 = \alpha_1 T_N$  y  $T_2 = \alpha_2 T_N$  que dan lugar a secuencia  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente.

- Bosquejar los espectros de  $X_1(e^{j\theta})$  y  $X_2(e^{j\theta})$  en el caso de  $\alpha_1 = 3$  y  $\alpha_2 = 1/2$ , marcando los puntos de interés en  $\theta$ .

# Solución

## Problema 1

(a)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_A s + \omega_A^2}{s^2 + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} + \frac{\omega_A^2}{100}}$$

(b)

$$z_0 = \omega_A(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1 - \zeta_0^2}), p_0 = \frac{\omega_A}{10}(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1 - \zeta_0^2})$$

Por lo tanto, es trivial ver que:

$$|z_0| = \omega_A, |p_0| = \frac{\omega_A}{10}$$

(c) Ya que no pueden existir cancelaciones entre ceros y polos (debido a que tiene módulo distinto) y es una transferencia real racional y propia, la estabilidad dependerá de la posición relativa de los polos en el plano complejo.

Por lo tanto debe de cumplirse que:  $p_0 \in C^- \Rightarrow -\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} < 0 \Rightarrow \zeta_1 > 0$

Por otro lado, debe cumplirse que  $H(s = j100) = 0 \Rightarrow \zeta_0 = 0, \omega_A = \omega_C$

(d) Si el sistema es BIBO estable, la respuesta en régimen ante la entrada escalón puede obtenerse mediante el teorema del valor final, ya que  $s \times H(s) \times \frac{1}{s}$  no tiene polos en el semi-plano derecho cerrado. Por lo tanto la respuesta es:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \frac{1}{s} = H(0) = 100$ .

## Problema 2

(a)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_A s + \omega_A^2}{s^2 + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} + \frac{\omega_A^2}{100}}$$

(b)

$$z_0 = \omega_A(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1 - \zeta_0^2}), p_0 = \frac{\omega_A}{10}(-\zeta_0 \pm j\sqrt{1 - \zeta_0^2})$$

Por lo tanto, es trivial ver que:

$$|z_0| = \omega_A, |p_0| = \frac{\omega_A}{10}$$

(c) Ya que no pueden existir cancelaciones entre ceros y polos (debido a que tiene módulo distinto) y es una transferencia real racional y propia, la estabilidad

Por lo tanto debe de cumplirse que:  $p_0 \in C^- \Rightarrow -\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} < 0 \Rightarrow \zeta_1 > 0$

(d) Si el sistema es BIBO estable, la respuesta en régimen ante la entrada escalón puede obtenerse mediante el teorema del valor final, ya que  $s \times H(s) \times \frac{1}{s}$  no tiene polos en el semi-plano derecho cerrado. Por lo tanto la respuesta es:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) \frac{1}{s} = H(0) = 100$ .

## Problema 13

(a)  $H_R(j\omega)$  es un filtro pasabajos ideal de ancho de banda  $\omega_s/2 = \pi/T_s$  y ganancia  $T_s$ . El máximo  $T_N$  corresponde a la frecuencia de Nyquist dada por el Teorema del Muestreo  $\omega_N = 2\pi/T_N = 2W_x$ , por lo tanto  $T_N = \pi/W_x$ .

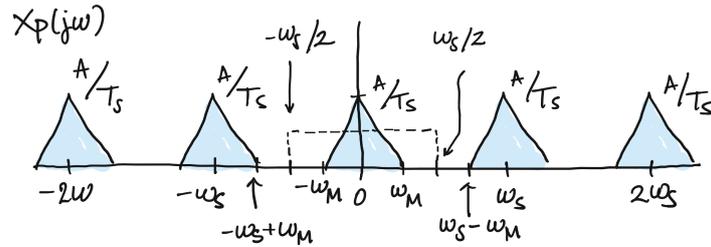
(b) Por un lado tenemos

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right).$$

Por otro lado tenemos

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - kw_s)).$$

El bosquejo es el siguiente donde  $\omega_M = W_x$



(c) Ver teórico (demostración del Teorema del Muestreo) para llegar a

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\theta}) \text{ con el mapeo } \theta = \omega T_s.$$

(d) Con  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 1/2$ . Tenemos que determinar según el mapeo  $\theta_i = \omega T_i$  cómo quedan los espectros de  $X_i(e^{j\theta})$  con  $i = 1, 2$ . Llamemos  $\theta_x^i$  el valor de  $\theta$  donde se mapea el ancho de banda de  $x(t)$ ,  $W_x$ ,

$$\theta_x^i = W_x T_i = W_x \alpha_i \frac{\pi}{W_x} = \alpha_i \pi.$$

Si  $\alpha_i > \frac{1}{2}$  existirá solapamiento.

## Problema 14

(a)  $H_R(j\omega)$  es un filtro pasabajos ideal de ancho de banda  $\omega_s/2 = \pi/T_s$  y ganancia  $T_s$ . El máximo  $T_N$  corresponde a la frecuencia de Nyquist dada por el Teorema del Muestreo  $\omega_N = 2\pi/T_N = 2W_x$ , por lo tanto  $T_N = \pi/W_x$ .

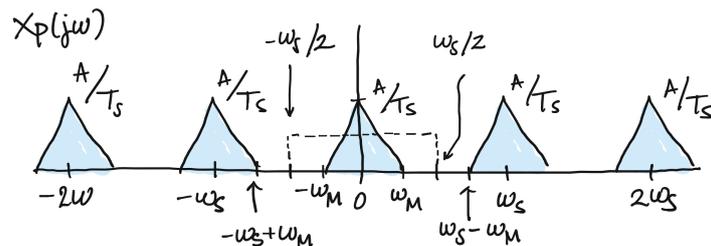
(b) Por un lado tenemos

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right).$$

Por otro lado tenemos

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - kw_s)).$$

El bosquejo es el siguiente donde  $\omega_M = W_x$



(c) Ver teórico (demostración del Teorema del Muestreo) para llegar a

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\theta}) \text{ con el mapeo } \theta = \omega T_s.$$

(d) Con  $\alpha_1 = 3$  y  $\alpha_2 = 1/3$ . Tenemos que determinar según el mapeo  $\theta_i = \omega T_i$  cómo quedan los espectros de  $X_i(e^{j\theta})$  con  $i = 1, 2$ . Llamemos  $\theta_x^i$  el valor de  $\theta$  donde se mapea el ancho de banda de  $x(t)$ ,  $W_x$ ,

$$\theta_x^i = W_x T_i = W_x \alpha_i \frac{\pi}{W_x} = \alpha_i \pi.$$

Si  $\alpha_i > \frac{1}{2}$  existirá solapamiento.

## Problema 15

(a)  $H_R(j\omega)$  es un filtro pasabajos ideal de ancho de banda  $\omega_s/2 = \pi/T_s$  y ganancia  $T_s$ . El máximo  $T_N$  corresponde a la frecuencia de Nyquist dada por el Teorema del Muestreo  $\omega_N = 2\pi/T_N = 2W_x$ , por lo tanto  $T_N = \pi/W_x$ .

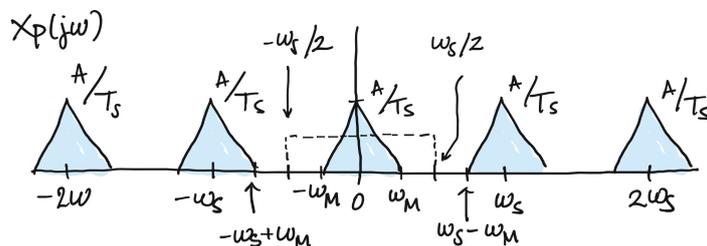
(b) Por un lado tenemos

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta\left(\omega - k \frac{2\pi}{T_s}\right).$$

Por otro lado tenemos

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - k\omega_s)).$$

El bosquejo es el siguiente donde  $\omega_M = W_x$



(c) Ver teórico (demostración del Teorema del Muestreo) para llegar a

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\theta}) \text{ con el mapeo } \theta = \omega T_s.$$

(d) Con  $\alpha_1 = 2$  y  $\alpha_2 = 1/3$ . Tenemos que determinar según el mapeo  $\theta_i = \omega T_i$  cómo quedan los espectros de  $X_i(e^{j\theta})$  con  $i = 1, 2$ . Llamemos  $\theta_x^i$  el valor de  $\theta$  donde se mapea el ancho de banda de  $x(t)$ ,  $W_x$ ,

$$\theta_x^i = W_x T_i = W_x \alpha_i \frac{\pi}{W_x} = \alpha_i \pi.$$

Si  $\alpha_i > \frac{1}{2}$  existirá solapamiento.

## Problema 16

(a)  $H_R(j\omega)$  es un filtro pasabajos ideal de ancho de banda  $\omega_s/2 = \pi/T_s$  y ganancia  $T_s$ . El máximo  $T_N$  corresponde a la frecuencia de Nyquist dada por el Teorema del Muestreo  $\omega_N = 2\pi/T_N = 2W_x$ , por lo tanto  $T_N = \pi/W_x$ .

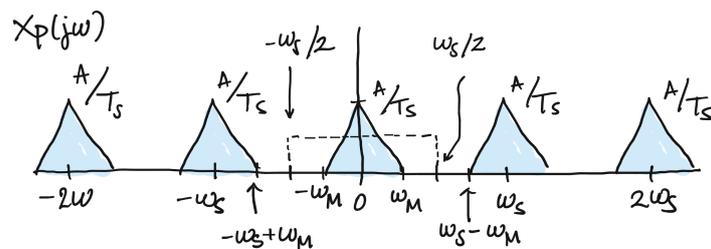
(b) Por un lado tenemos

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_k \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right).$$

Por otro lado tenemos

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_k X(j(\omega - kw_s)).$$

El bosquejo es el siguiente donde  $\omega_M = W_x$



(c) Ver teórico (demostración del Teorema del Muestreo) para llegar a

$$X_p(j\omega) = X_d(e^{j\theta}) \text{ con el mapeo } \theta = \omega T_s.$$

(d) Con  $\alpha_1 = 3$  y  $\alpha_2 = 1/2$ . Tenemos que determinar según el mapeo  $\theta_i = \omega T_i$  cómo quedan los espectros de  $X_i(e^{j\theta})$  con  $i = 1, 2$ . Llamemos  $\theta_x^i$  el valor de  $\theta$  donde se mapea el ancho de banda de  $x(t)$ ,  $W_x$ ,

$$\theta_x^i = W_x T_i = W_x \alpha_i \frac{\pi}{W_x} = \alpha_i \pi.$$

Si  $\alpha_i > \frac{1}{2}$  existirá solapamiento.