Señales y Sistemas

Segundo parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

26 de junio de 2019

Indicaciones

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y 30 minutos.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas. Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [15 puntos]

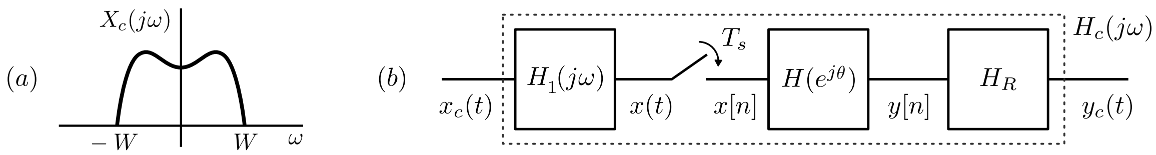
Sea H un sistema de tiempo discreto dado por la relación de entrada y salida

$$y[n] = b\,x[n] + \frac{1}{2}\,x[n-1] + b\,x[n-2].$$

(a) Mostrar que el sistema es BIBO estable para todo b.

(b) Hallar su transferencia $H(e^{j\theta})$ y bosquejar su módulo para b positivo.

Sea $x_c(t)$ una señal de tiempo continuo con ancho de banda W como se muestra en la subfigura (a).



La señal $x_c(t)$ es muestreada como se muestra en la subfigura (b), obteniendo así la señal de tiempo discreto $x[n]$. El período de muestreo es $T_s = {}^2\!/_3\, T_N$ donde $T_N = {}^\pi\!/_W$ corresponde a la frecuencia de Nyquist, y $H_1(j\omega)$ es un filtro para evitar solapamiento (*antialiasing*).

(c) Bosquejar la DTFT $X\left(e^{j\theta}\right)$ de $x[n]$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ indicando los valores de θ en que se anula. Justificar.

Se procesan las muestras $x[n]$ con el sistema H y la salida $y[n]$ se convierte a tiempo continuo $y_c(t)$ por medio de un filtro reconstructor ideal H_R según la subfigura (b).[1]

(d) Hallar la transferencia $H_c(j\omega)$ del sistema equivalente en tiempo continuo con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

(e) Determinar el parámetro b para que $H_c(j\omega)|_{\omega=W} = 0$.

(f) Para el valor de b hallado en la parte anterior, bosquejar el módulo de $H_c(j\omega)$ indicando el rango de frecuencia donde se anula.

(g) Indicar si se trata de un filtro pasabajos o pasaaltos o ninguno de los dos. Justificar.

[1] H_R se modela como una *conversión a tren de deltas* ($y_p(t) = \sum_n y[n]\delta(t - nT_s)$) filtrado por un LPF ideal con $\omega_c = {}^\pi\!/_{T_s}$, $G = T_s$.

Problema 2 [14 puntos]

Considerar el filtro causal con la siguiente transferencia, donde α es un parámetro real positivo.

$$H_1(z) = \frac{1}{(1-\alpha e^{j\pi/3}z^{-1})(1-\alpha e^{-j\pi/3}z^{-1})}$$

(a) Dar el diagrama de ceros y polos de H_1.

(b) Estudiar rango de α para que H_1 sea estable.

Se toma $\alpha = 0.8$ de aquí en más.

(c) Bosquejar la respuesta frecuencial de H_1 en módulo calculando explícitamente la ganancia en módulo de H_1 en frecuencias $\theta = \{0, \pi/3, \pi\}$.

(d) Dar un diagrama de bloques que implemente el filtro H_1, utilizando coeficientes reales.

Se agrega ahora, en cascada con H_1, un filtro $H_2(z)$ no recursivo (FIR), causal, de tres coeficientes, que tenga respuesta frecuencial nula en frecuencias $\theta = \{0, \pi\}$ y ganancia unitaria en $\theta = \pi/2$.

(e) Determinar $H_2(z)$ y su respuesta al impulso $h_2[n]$.

El filtro completo a utilizar, $H(z)$, es la cascada de los dos filtros anteriores: $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

(f) Dar un diagrama de bloques que implemente $H(z)$ con coeficientes reales y sólo dos elementos de retardo.

Problema 3 [11 puntos]

Considerar el sistema lineal, invariante en el tiempo y causal H que ha sido modelado a través de la siguiente ecuación diferencial, asumiendo condiciones iniciales nulas:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0\, y(t) = A\, x(t)$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la respuesta y ω_0 y A son dos constantes positivas.

(a) Determinar la transferencia del sistema $H(s)$ (expresión analítica y su región de convergencia). Justificar.

(b) Determinar si el sistema es o no BIBO estable.

(c) Dar el diagrama de ceros y polos de $H(s)$.

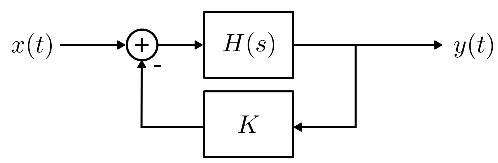
(d) Bosquejar el módulo y la fase de la respuesta en frecuencia del sistema.

El sistema H es realimentado según la siguiente figura, donde K es una constante real cualquiera.

(e) Determinar la transferencia en lazo cerrado del nuevo sistema.

(f) Determinar para qué valores de K el nuevo sistema es BIBO estable.

(g) Para el caso $K = -\frac{\omega_0}{A}$, obtener la respuesta del sistema ante una entrada escalon ($x(t) = Eu(t)$) y justificar si el resultado obtenido es coherente con el de la parte anterior.



Pregunta 1 [10 puntos]

Sea $x_p(t) = x(t)\,p(t)$ una señal dada por el producto entre $x(t)$, una señal de ancho de banda W, y $p(t)$, un tren de deltas de período T_s. Mostrar que bajo ciertas condiciones que deben ser determinadas es posible recuperar $x(t)$ a partir de $x_p(t)$. Indicar el filtro que permite esta reconstrucción. Es necesario plantear las ecuaciones que justifican este resultado; en caso de hacer gráficas o bosquejos deben indicarse los ejes y puntos relevantes.

Solución

Problema 1

(a) El filtro es un filtro FIR, por lo tanto es módulo integrable, entonces es estable BIBO.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = b + \frac{1}{2}e^{-j\theta} + be^{-2j\theta} = e^{-j\theta}\left(be^{j\theta} + \frac{1}{2} + be^{-j\theta}\right) =$$

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\left(\frac{1}{2} + 2b\cos(\theta)\right)$$

Por lo tanto el módulo a bosquejar es

$$|H(e^{j\theta})| = |\frac{1}{2} + 2b\cos(\theta)|$$

Como se puede ver es simplemente el módulo de un coseno elevado, que dependiendo del parámetro b se anula para algún valor de θ o no.

(c) Dado que la entrada cumple con las hipótesis del teorema de muestreo, ya que $2W < \omega_s = 3W$, el espectro de $X\left(e^{j\theta}\right)$ mantiene la forma del espectro $X(j\omega)$ a menos de la multiplicación por la constante $1/T_s$. Haciendo el cambio de variable $\theta_W = 2\pi W/\omega_s = T_s W$ se determina el valor de θ correspondiente a la frecuencia W. Es importante mostrar en el bosquejo de que el espectro en θ es periódico cada 2π.

(d)

$$H_c(j\omega) = H(e^{j\theta})|_{\theta=T_s\omega} = e^{-jT_s\omega}\left(\frac{1}{2} + 2b\cos(T_s\omega)\right)$$

para $|\omega| < \frac{\pi}{T_s}$ y $H_c(j\omega) = 0$ para los demás valores de ω.

(e) $b = 1/2$

(f)

(g) Se puede decir que es un filtro pasa bajos para señales con ancho de banda menor a W. O si las señal es una de ancho de banda mayor que W y cumple el teorema de muestreo se puede decir que el filtro no es ni pasabajos, ni pasaaltos, sino que suprime todas las frecuencias cercanas a W y $-W$.

Problema 2

(a) $H_1(z)$ tiene 2 polos complejos conjugados, con módulo α y fase $\pm\pi/3$. Tiene además 2 ceros en $z = 0$.

(b) Como el filtro es causal, los polos deben estar dentro del círculo unidad. Por lo tanto $\alpha < 1$.

(c) La respuesta en módulo tiene resonancia en $\theta = \pm\pi/3$ y mínimos en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

$$H_1(e^{j0}) = 1/(1 - \alpha + \alpha^2) = 1/0.84 = 1.19$$

$$H_1(e^{j\pi}) = 1/(1 + \alpha + \alpha^2) = 1/2.44 = 0.41$$

$$H_1(e^{j\pi/3}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{j\pi/3}e^{-j\pi/3})(1 - \alpha e^{-j\pi/3}e^{-j\pi/3})} = \frac{1}{(1-\alpha)(1 - \alpha e^{-j2\pi/3})}$$

$$|H_1(e^{-j\pi/3})| = \frac{5}{|1 - 0.8e^{-j2\pi/3}|} \approx 3.2009$$

(d) Agrupando pares de ceros y polos complejos conjugados se obtienen coeficientes reales. En este caso sólo hay 2 polos. Queda entonces una forma directa con 2 retardos. $H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$, por lo que los coeficientes recursivos son α y $-\alpha^2$.

(e) Este filtro debe tener dos ceros en frecuencias 0 y π: $H_2(z) = (1-z^{-1})(1+z^{-1}) = 1-z^{-2}$ Por inspección, resulta $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$.

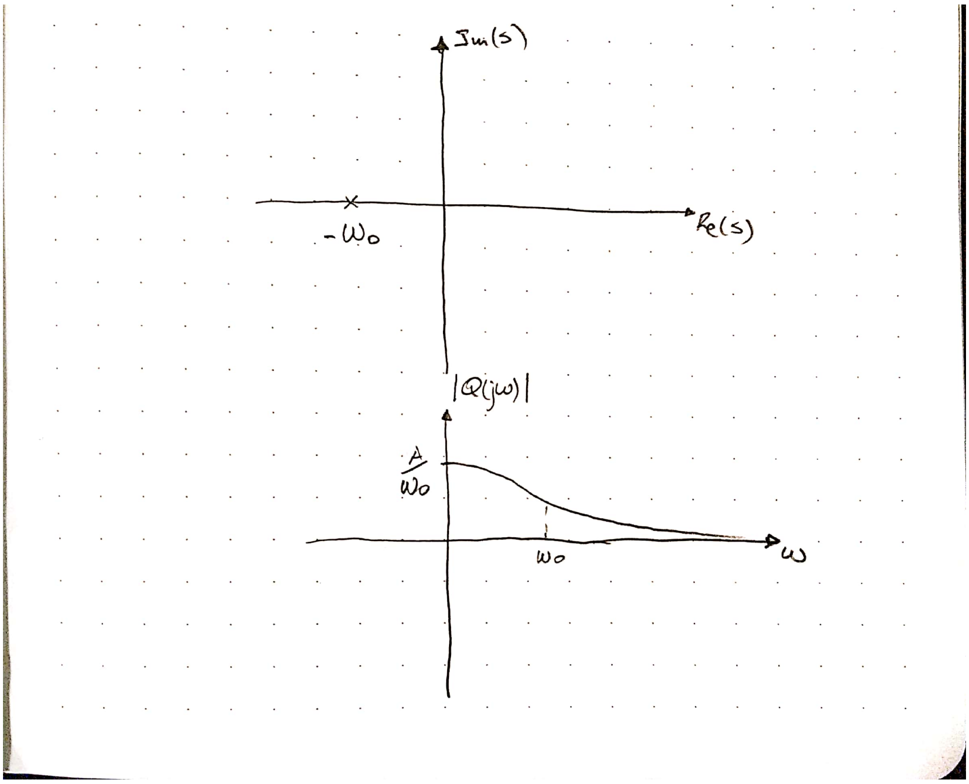
(f) Debe usarse la forma canónica. Los coeficientes recursivos son los mismos de $H_2(z)$, y los coeficientes no recursivos son 1, 0 y -1.

Problema 3

(a)

$$sY(s) = \omega_0 Y(s) = AX(s) \Rightarrow H(s) = \frac{A}{s+\omega_0}$$

(b) El sistema tiene un único polo en $s_0 = -\omega_0 < 0$, por lo que SI es BIBO estable.



(c)

(d) Ver la figura anterior.

(e)

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1+KH(s)} = \frac{A}{s+\omega_0+KA}$$

(f) El sistema tiene un único polo en $s_0 = -\omega_0 - KA$ que será negativo si se cumple que $K > -\frac{\omega_0}{A}$.

(g) Para este caso la respuesta del sistema resulta:

$$Y(s) = Q(s) \times \frac{E}{s} = \frac{A}{s} \times \frac{E}{s} \Rightarrow y(t) = u(t)AEt$$

Esto es coherente con la condición de estabilidad BIBO obtenida en la parte anterior: en este caso, una entrada acotada produce una respuesta no acotada, lo cual verifica que para el valor de K utilizado el sistema NO es BIBO estable.

Pregunta 1

Ver teórico. Atención, no sé está pidiendo demostrar el teorema de muestreo, la condición entre la frecuencia de muestreo y el ancho de banda debe ser determinada en la deducción.