Señales y Sistemas

Primer parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

29 de abril de 2019

Indicaciones

- La prueba tiene una duración total de 3 horas y media.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.
- Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones. En las gráficas o bosquejos deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

Problema 1 [10 puntos]

Sea una señal $x[n]$ definida en el soporte finito $n = 0, 1, \dots, N-1$ y su extensión $\bar{x}[n]$ definida en $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n],\ n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0,\ \text{en otro caso} \end{cases} .$$

(a) Mostrar que la DFT $X[k]$ de $x[n]$ y la DTFT $X(e^{j\theta})$ de $\bar{x}[n]$ están relacionadas por la siguiente expresión hallando θ_k:

$$X[k] = X(e^{j\theta})\big|_{\theta=\theta_k} .$$

De aquí en más usaremos $N = 4$ y la señal $x[n] = 1 + \cos(\pi n),\ n = 0, 1, 2, 3.$

(b) Bosquejar $x[n]$ y $\bar{x}[n]$.

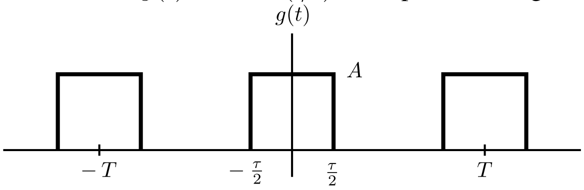
(c) Calcular la DFT $X[k]$ de $x[n]$.

(d) Calcular la DTFT $X(e^{j\theta})$ de $\bar{x}[n]$.

(e) Verificar que se cumple la condición obtenida en la parte (a).

Problema 2 [10 puntos]

Considerar la señal $g(t)$ donde $\Pi(^t/_\tau)$ es un pulso rectangular de ancho $\tau < T$ y altura uno, según la figura



$$g(t) = A\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (1)$$

(a) Hallar los coeficientes g_k de la Serie de Fourier de $g(t)$.

(b) Hallar y bosquejar la Transformada de Fourier $G(j\omega)$ de $g(t)$ a partir de la ecuación (1).

(c) Mostrar, hallando los p_k, que

$$G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \, \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right).$$

Problema 3 [15 puntos]

Considerar el SLIT causal H_β dado por la siguiente ecuación en diferencias de parámetro β, con $|\beta| < 1$.

$$H_\beta : \; y[n] = x[n] + \beta y[n-1]$$

(a) Definir estabilidad BIBO para un sistema. Dar la condición que debe cumplir la respuesta al impulso $h[n]$ de un SLIT para que sea estable BIBO.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h_\beta[n]$ de H_β.

(c) Verificar que el sistema es estable.

(d) Hallar la respuesta en frecuencia del sistema $H_\beta(e^{j\theta})$.

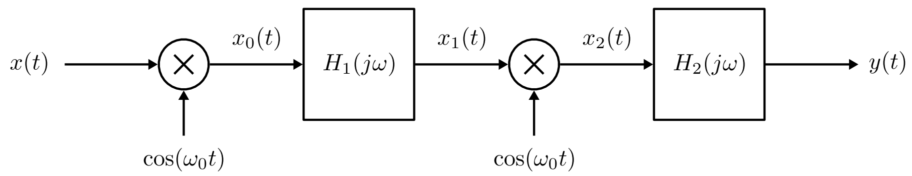
(e) Dar un diagrama de bloques que implemente el sistema H_β.

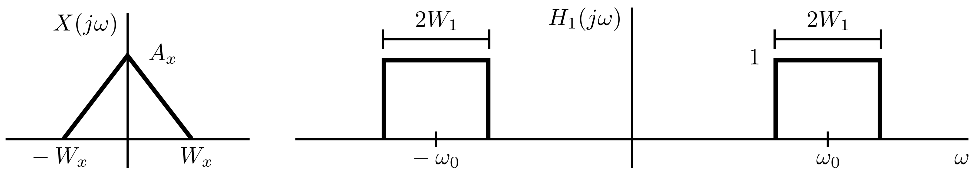
Se construye el sistema H poniendo un sistema H_β de parámetro $\beta = 1/2$ en cascada con otro sistema H_β de parámetro $\beta = -1/2$.

(f) Hallar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$.

Problema 4 [15 puntos]

Considerar el sistema de la figura donde el $H_1(j\omega)$ es un filtro pasabanda de frecuencia central ω_0 y ancho de banda $2W_1$ y $x(t)$ es de banda acotada W_x que también se bosquejan en la figura.





(a) Hallar y bosquejar la respuesta al impulso del filtro pasabanda $h_1(t)$ identificando sus puntos característicos.

(b) Hallar y bosquejar el espectro de $x_0(t)$.

(c) Hallar la relación entre las energías de $x(t)$ y $x_0(t)$.

(d) Hallar las condiciones que deben cumplir ω_0 y W_1 para que $x_1(t) = x_0(t)$.

(e) Especificar el filtro $H_2(j\omega)$ para poder recuperar $y(t) = x(t)$

Solución

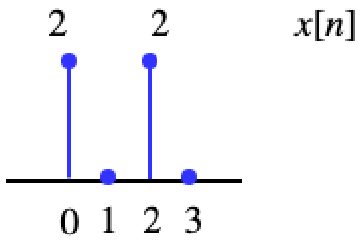
Problema 1

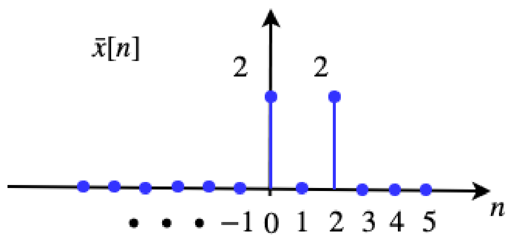
(a)

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\theta_k n} = X(e^{j\theta_k})$$

con

$$\theta_k = \frac{2\pi}{N}k$$





(b)

(c)

$$X[0] = 4,\; X[1] = 0,\; X[2] = 4,\; X[3] = 0.$$

(d)

$$X(e^{j\theta}) = 2 + 2e^{-2j\theta}$$

(e)

$$X(e^{j\theta_0}) = 2 + 2e^{-2j0} = 4$$
$$X(e^{j\theta_1}) = 2 + 2e^{-2j\frac{2\pi}{4}} = 0$$
$$X(e^{j\theta_2}) = 2 + 2e^{-2j\frac{4\pi}{4}} = 4$$
$$X(e^{j\theta_3}) = 2 + 2e^{-2j\frac{6\pi}{4}} = 0$$

Problema 2

(a)

$$g_k = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} Ae^{-jk\omega_0 t}dt = A\frac{\tau}{T}\mathrm{sinc}\left(k\frac{\tau}{T}\right)$$

(b) La transformada de Fourier puede calcularse como el producto de las transformadas del pulso, $Pu(j\omega)$, y del peine de Dirac, $Pe(j\omega)$.
La transformada de Fourier del pulso es:

$$Pu(j\omega) = A\tau\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\tau\right)$$

Mientras que la del peine (que puede obtenerse mediante tablas o mediante su representación en series de Fourier), resulta:

$$Pe(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Por lo tanto:

$$G(j\omega) = Pu(j\omega)Pe(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi A \frac{\tau}{T} \mathrm{sinc}\left(k\frac{\tau}{T}\right) \delta(\omega - k\omega_0)$$

(c) De esta forma resulta evidente que $p_k = 2\pi g_k$.

Problema 3

(a) Se debe cumplir que $h[n]$ sea absolutamente sumable. Es decir:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

(b)

$$h_\beta[n] = u[n]\beta^n$$

(c) La condición de estabilidad para el filtro H_β es:

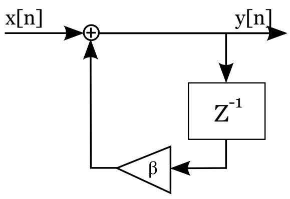
$$\sum_{-\infty}^{\infty} |u[n]\beta^n| = \sum_{0}^{\infty} |\beta|^n < \infty$$

Por lo tanto la condición de estabilidad es: $|\beta| < 1$.

(d)

$$H_\beta(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\theta}}$$

(e)



(f)

$$H_\beta(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\theta}} \frac{1}{1 + 0.5e^{-j\theta}}$$

$$H_\beta(e^{j\theta}) = \frac{1}{1 - 0.25e^{-j2\theta}}$$

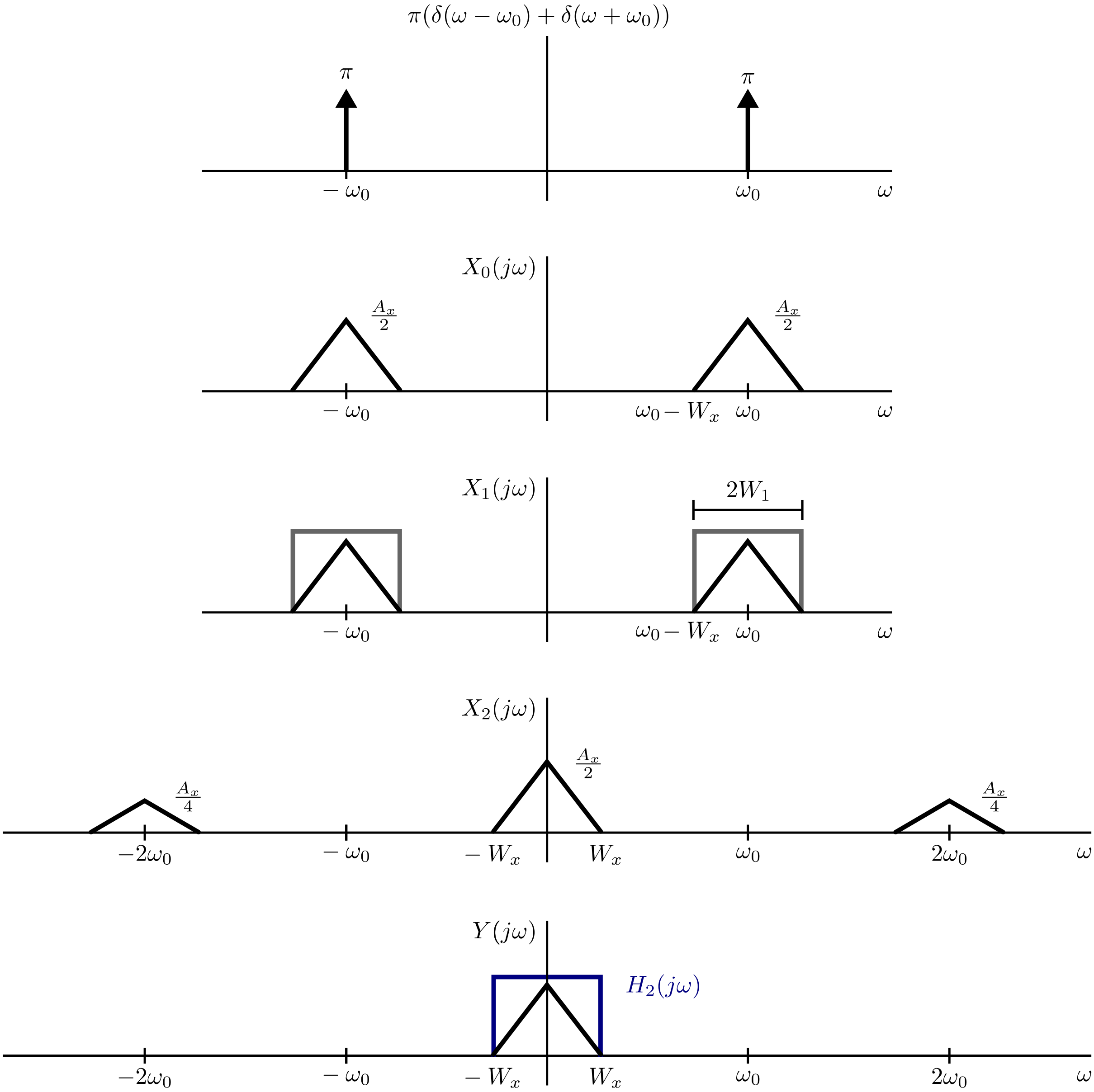
Problema 4

(a) El pasabanda $H_1(j\omega)$ se puede interpretar como un pasabajos de ancho de banda W_1 multiplicado por un $\cos(\omega_0 t)$ que lo desplaza en frecuencia hacia $\pm\omega_0$. Por lo tanto será

$$h_1(t) = 2\frac{W_1}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{W_1 t}{\pi}\right) \cos(\omega_0 t).$$

(b) La siguiente figura muestra el bosquejo de las señales en cada uno de los puntos del sistema estudiado. Para hallar el espectro de $x_0(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$ usamos la propiedad de convolución de la Transformada de Fourier.

$$X_0(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \pi(\delta(j(\omega-\omega_0)) + \delta(j(\omega+\omega_0))) = \frac{1}{2}X(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}X(j(\omega+\omega_0))$$



(c) La relación entre las energías de $x(t)$ y $x_0(t)$ la obtenemos a partir de la relación de Parseval.

$$E_{x_0} = \int_{-\infty}^{+\infty}|x_0(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X_0(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|(1/2X(j(\omega-\omega_0)))|^2d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|(1/2X(j(\omega+\omega_0)))|^2d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}2\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \frac{E_x}{2}$$

(d) Para que $H_1(j\omega)$ no afecte el espectro de $x_0(t)$ de forma que $x_1(t) = x_0(t)$ entonces debe cumplirse que

$$W_1 \geq W_x;$$

además deben ser $\omega_0 \geq W_x$ lo cual se garantiza por la construcción de $H_1(j\omega)$.

(e) $y(t)$ consiste en el filtrado de $x_2(t)$. Para recuperar $y(t) = x(t)$, a partir del espectro de $X_2(j\omega)$ queda claro que se deben eliminar las componentes centradas en $\pm 2\omega_0$. Esto lo logramos con un filtro pasabajos con un ancho de banda W_2 que debe cumplir las siguiente dos condiciones:

1. $W_2 \geq W_x$
2. $W_2 < 2\omega_0 - W_x$