Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

12 de diciembre de 2022

Indicaciones

- La prueba consiste en dos problemas a resolver en 3 horas y media. Luego tendrán 15 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- La prueba es individual y el único material que se puede consultar es la hoja de fórmulas oficial del curso (disponible en https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/287657/mod_resource/content/1/formulas_seys.pdf).
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán a la parte oral del examen. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.
- La entrega de la prueba consiste de dos partes. Primero, la entrega de las hojas utilizadas para la resolución de los ejercicios, convenientemente identificadas. Segundo, la entrega en el EVA de estas hojas digitalizadas, como se explica a continuación.
- La entrega en el EVA consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea *Entrega examen 2022-12-12* (https://eva.fing.edu.uy/mod/assign/view.php?id=184809). Solo en caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com.

- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el *Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería* disponible en https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf.

Problema 1

Se desea implementar un filtro derivador en tiempo discreto, donde idealmente la respuesta en módulo vale 0 en frecuencia $\theta = 0$ y crece linealmente hasta 1 en $\theta = \pi$. Como aproximación, se utiliza el filtro H definido por la ecuación en diferencias $y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] - \beta x[n-2] - \alpha x[n-3]$.

(a) Estudiar estabilidad de H.

(b) Estudiar linealidad de fase de H.

(c) Calcular la respuesta frecuencial de H, la respuesta en módulo y la respuesta en fase (3 expresiones en total).

(d) Calcular el retardo de grupo $\tau(e^{j\theta})$.

Los parámetros del filtro se ajustarán para asegurar las 3 condiciones siguientes: $H(e^{j0}) = 0$, $|H(e^{j\pi/2})| = 1/2$, y $|H(e^{j\pi})| = 1$.

(e) Calcular α y β.

Se desea aplicar el filtro a la señal $x[n]$, que correpsponde al muestreo de $x_c(t) = cos(2\pi 2000t)$ con una frecuencia de muestreo $f_s = 8000\ Hz$.

(f) Graficar el espectro de x_c y de $x[n]$.

(g) Hallar la salida del sistema $y[n]$ cuando la entrada es $x[n]$.

Problema 2

Se considera un sistema causal, lineal e invariante en el tiempo, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, el cual es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 11\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 10y = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx$$

donde k es un real a determinar.

(a) Determinar la transferencia del sistema, $H(s)$.

(b) Hallar k para que la ganancia en continua sea nula.

(c) Realizar el diagrama de ceros y polos del sistema.

(d) Determinar la respuesta al impulso del sistema, $h(t)$.

(e) Estudiar la estabilidad BIBO del sistema.

(f) Calcular la respuesta en frecuencia del sistema y bosquejar su módulo.

(g) Calcular la respuesta del sistema al escalón $E\,u(t)$ para todo tiempo positivo.

(h) Calcular el valor final de la respuesta al escalón utilizando el teorema respectivo, y verificar que el resultado es consistente con la parte anterior.

Solución

Problema 1

(a) El filtro es FIR, por lo tanto es estable BIBO.

(b) La respuesta al impulso corresponde a un filtro de fase lineal generalizada de tipo IV.

(c)

$$H(e^{j\theta}) = 2j\, e^{-3\theta/2}\left(\beta \sin\frac{\theta}{2} + \alpha \sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$|H(e^{j\theta})| = 2\left|\beta \sin\frac{\theta}{2} + \alpha \sin\frac{3\theta}{2}\right|$$

$\angle H(e^{j\theta}) = \pi - 3\theta/2$ donde debe agregarse π en los intervalos en que $\beta \sin\frac{\theta}{2} + \alpha \sin\frac{3\theta}{2} < 0$.

(d) Para filtros FIR de fase lineal, el retardo de grupo es el centro de simetría de la respuesta al impulso. En este caso, $\tau(e^{j\theta}) = 3/2$.

(e) Debe verificarse $2(\alpha - \beta) = 1$ y $\sqrt{2}(\beta + \alpha) = 1/2$.
La solución es $\beta = (\sqrt{2} + 2)/8$ y $\alpha = (\sqrt{2} - 2)/8$.

(f) Se tiene que $T_s = 1,25 \times 10^{-4} s$, por lo tanto $x[n] = \cos(n\pi/2)$ El espectro de $x(t)$ corresponde a dos deltas con peso $\frac{1}{2\pi}$ en $\pm 1000 Hz$. El espectro luego de muestrear en el período principal corresponde a dos deltas con peso $\frac{1}{2\pi}$ en $\pm\pi/2$

(g) La respuesta en módulo en $\pi/2$ es por letra $1/2$ y tiene un retardo de grupo $3/2$. Por lo tanto: $y[n] = \frac{1}{2}\cos((n - 3/2)\pi/2)$

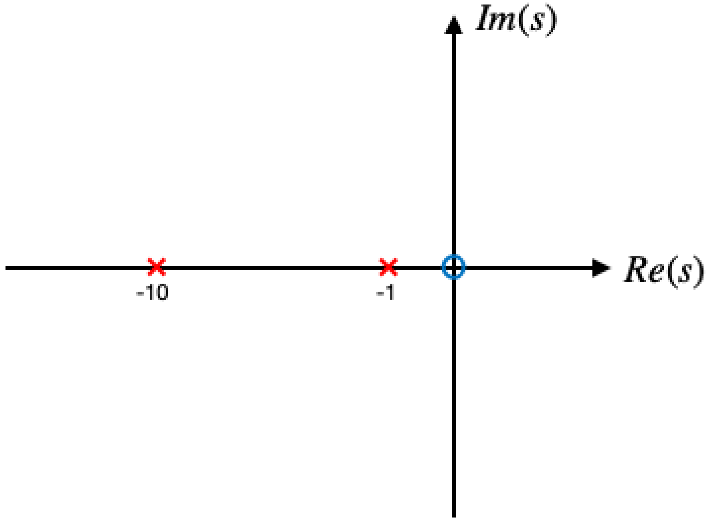
Problema 2

(a)

$$s^2 Y(s) + 11 s Y(s) + 10 Y(s) = s X(s) + k X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{s + k}{(s+1)(s+10)}$$

(b) Para que la ganancia en continua sea nula, $H(s = 0) = 0$. Entonces:

$$k = 0$$



(c)

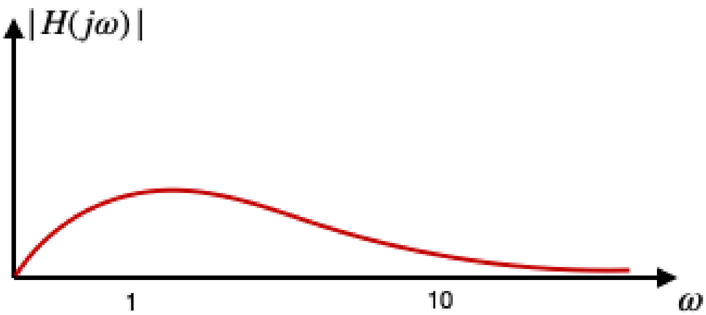
(d)

$$H(s) = \frac{10/9}{s+10} + \frac{-1/9}{s+1} \Rightarrow h(t) = u(t)(10/9)e^{-10t} + u(t)(-1/9)e^{-t}$$

(e) El sistema es BIBO estable ya que, por ejemplo, su respuesta al impulso es módulo integrable.

(f)

$$H(j\omega) = H(s = j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega + 10)(j\omega + 1)}$$



(g)

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{E}{(s+10)(s+1)} \Rightarrow y(t) = u(t)E(1/9)[e^{-10t} + e^{-t}]$$

(h)

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0^+} sH(s)\frac{E}{s} = 0$$

Lo que es consistente con el resultado anterior.