Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de julio de 2022

Indicaciones

- La prueba consiste en dos problemas a resolver en 3 horas y media. Luego tendrán 15 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- La prueba es individual y el único material que se puede consultar es la hoja de fórmulas oficial del curso (disponible en https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/287657/mod_resource/content/1/formulas_seys.pdf).
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán a la parte oral del examen. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.
- La entrega de la prueba consiste de dos partes. Primero, la entrega de las hojas utilizadas para la resolución de los ejercicios, convenientemente identificadas. Segundo, la entrega en el EVA de estas hojas digitalizadas, como se explica a continuación.
- La entrega en el EVA consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos (ordenadas) de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea *Entrega examen 2022-07-19* (https://eva.fing.edu.uy/mod/assign/view.php?id=174821). Solo en caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com.

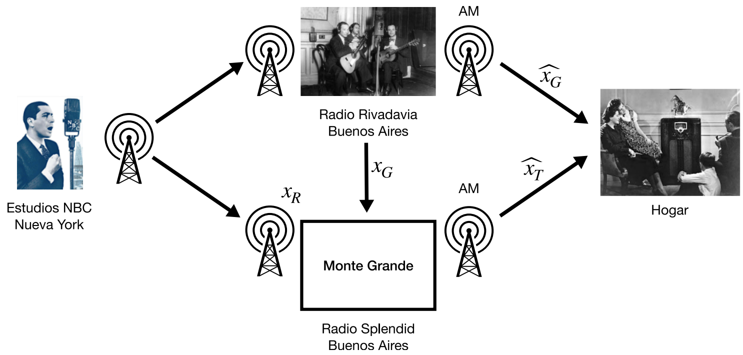


Figura 1: Dúplex radial entre Nueva York y Buenos Aires. Imágenes extraídas de *Fundación Internacional Carlos Gardel* (https://www.fundacioncarlosgardel.org/)

- Al realizar la entrega de esta prueba se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el *Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería* disponible en https://www.fing.edu.uy/sites/default/files/2011/3090/reglamentogeneral_0.pdf.

Problema 1

El 5 de marzo de 1934, Carlos Gardel fue parte de una transmisión radial conjunta entre Argentina y Estados Unidos (ver figura 1). Desde los estudios de la radio NBC de Nueva York, Carlos Gardel interpretó varios tangos que fueron transmitidos hacia Argentina. Desde los estudios de radio Rivadavia de Buenos Aires, los músicos escuchaban la voz del zorzal criollo y la acompañaban con sus instrumentos. Por otra parte, radio Splendid recibía tanto la voz de Gardel como el acompañamiento y transmitía ambas en conjunto. De esta manera, los oyentes podían sintonizar radio Splendid y escuchar un tango cantado por Gardel con acompañamiento musical o sintonizar radio Rivadavia y escuchar sólo la versión musical.
Considerar el sistema de comunicación de la figura 2, donde las señales $x_G(t)$ (guitarras) y $x_M(t)$ (el mago) son utilizadas para generar las señales $\widehat{x_G}$ y $\widehat{x_T}$, que son el resultado de una modulación AM. Éstas son transmitidas a través del aire, que es modelado como un pasabajos ideal. Un sintonizador de AM se encarga de obtener las señales $x_G(t)$ y $x_T(t)$ (música y voz con música respectivamente). Los espectros de x_G y x_M son como en la figura 2, con W_G y W_M conocidos.

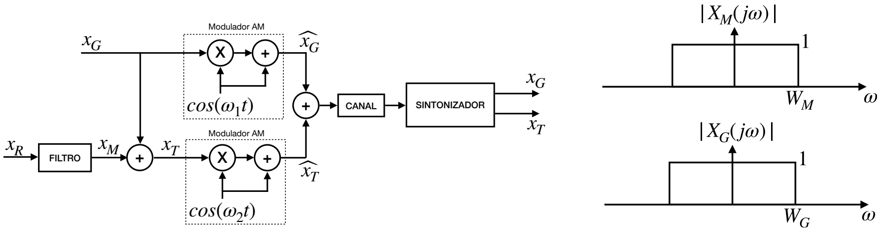


Figura 2: Modelado del problema y espectros de interés.

(a) Calcular el mínimo ω_1 y ω_2 que asegure que las señales puedan ser correctamente reconstruidas. Considerar $\omega_1 < \omega_2$.

(b) En las condiciones de la parte anterior, determinar el mínimo ancho de banda del canal para que las señales puedan ser correctamente reconstruidas.

(c) En las condiciones de las partes anteriores, bosquejar los espectros de las señales $\widehat{x_G}$ y $\widehat{x_T}$, así como el espectro a la salida del canal.

(d) Diseñar el sintonizador indicando:

1. Diagrama de bloques.
2. Espectro de todas las señales involucradas.

La señal $x_M(t)$ es el resultado de un filtrado de las señal recibida $x_R(t)$. El filtro utilizado tiene una transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{k(s - W_M)^2}{(s - (-0.1 + jW_M))\,(s - (-0.1 - jW_M))}.$$

(e) Determinar $k > 0$ para que el filtro posea ganancia en continua unitaria (en caso de utilizar aproximaciones, indíquelas claramente).

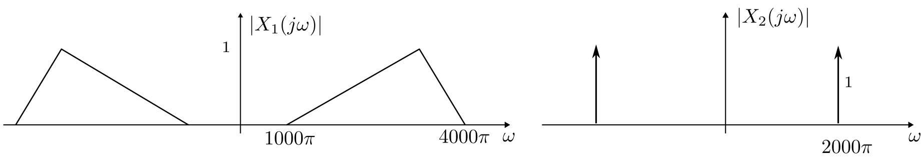
(f) Realizar un diagrama de ceros y polos del filtro $H(s)$.

(g) Estudiar la estabilidad del filtro y bosquejar, cuando corresponda, su respuesta en frecuencia indicando el valor exacto en todos los puntos notables.

(h) Bosquejar el espectro de x_R indicando su valor exacto en todos los puntos notables.

Problema 2

Sean las señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ con el espectro como el que se muestra la figura, y sea la señal $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$.



(a) Indicar la mínima frecuencia de muestreo que permita muestrear x_3 sin pérdida de información.

Sea ω_s la frecuencia hallada en la parte anterior y $T_s = 2\pi/\omega_s$.

(b) Graficar el espectro de la señal $x_3[n]$ muestreada a frecuencia w_s.

La señal $x_2(t)$ corresponde a interferencia no deseada, por lo que se quiere eliminar dicha componente.
Para lograr este objetivo se propone diseñar un filtro $H_a(z)$ causal, con dos polos y dos ceros que:

- elimine las componentes frecuenciales correspondientes a x_2.
- sus polos tengan igual fase que los ceros y módulo 0,99.
- tenga una ganancia aproximada a 1 en continua.

(c) Dar el diagrama de polos y ceros de $H_a(z)$.

(d) Hallar $H_a(z)$.

(e) Definir estabilidad BIBO. Indicar la condición necesaria y sufuciente que debe cumplir la respuesta al impulso de un sistema BIBO estable.

(f) Verificar la estabilidad de $H_a(z)$. Demostrar que la propiedad utilizada aquí implica la condición indicada en la parte anterior.

Asimismo, se desea atenuar las frecuencias más altas con un filtro cuya respuesta al impulso es

$$h_b[n] = 0.8\ \delta[n] + 0.2\ \delta[n-1].$$

(g) Hallar la transferencia del sistema $H_b(z)$.

(h) Bosquejar la respuesta en frecuencia de H_a y H_b.

(i) Dibujar un diagrama de bloques de un sistema que corresponda a aplicar ambos H_a y H_b con la mínima cantidad de retardos posible.

Sea $x_4[n]$ el resultado de filtrar $x_3[n]$ con ambos filtros H_a y H_b.

(j) Bosquejar el espectro de $x_4[n]$.

Solución

Problema 1

(a) En una modulación AM, es necesario transmitir ambas bandas de los espectros de $\widehat{x_G}$ y $\widehat{x_T}$. Eso significa que $W_G \leq \omega_1$ y $W_M \leq \omega_2$. Adicionalmente, los espectros no pueden solaparse para poder ser demoulados. Por lo tanto los valores mínimos serán:

$$\omega_1 = W_G,\ \omega_2 = 2W_G + W_T$$

$$W_T = \mathtt{max}\{W_G,\ W_M\}$$

(b) La frecuencia de corte ω_c del canal debe ser mayor al tamaño en frecuencia ocupado por las señales moduladas. Por lo tanto:

$$2W_G + 2W_T \leq \omega_c$$

$$W_T = \mathtt{max}\{W_G,\ W_M\}$$

(c) Ver 3.

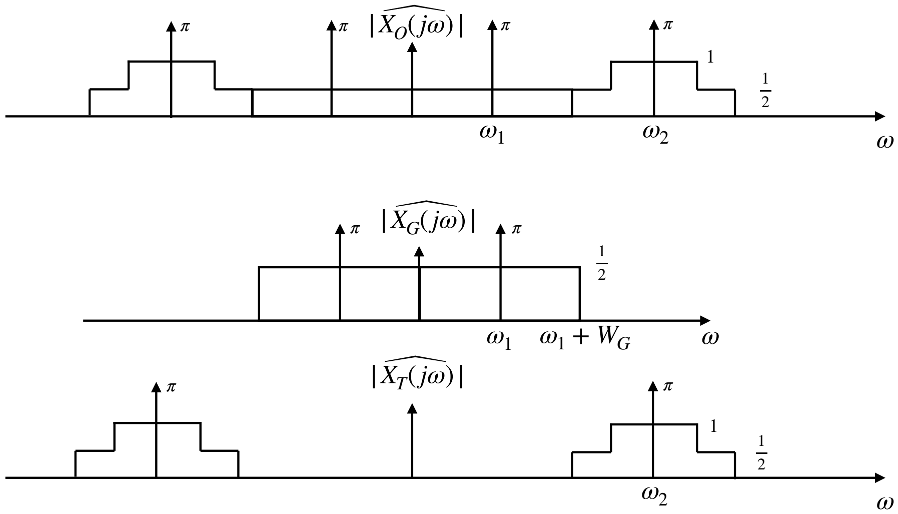


Figura 3: Espectros modulados.

(d) Ver figura 4.

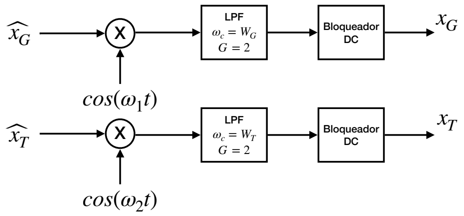


Figura 4: Sintonizador (demodulador) de AM.

(e) La ganancia en continua vale:

$$H(s=0) = \frac{kW_M^2}{0.1^2 + W_M^2} \approx k.$$

Por lo que:

$$k = 1.$$

(f) Ver figura 5.

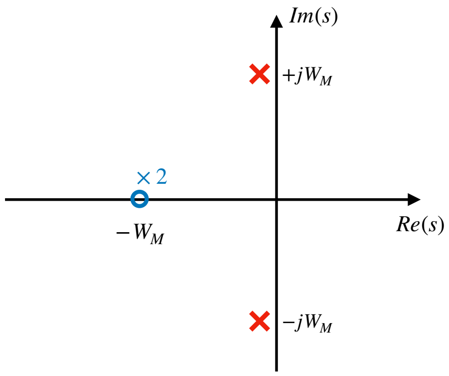


Figura 5: Diagrama de ceros y polos.

(g) Dado que la parte real de los polos en negativa (y naturalmente el sistema es causal) el sistema es estable y por lo tanto existe su respuesta en frecuencia (ver figura 6).

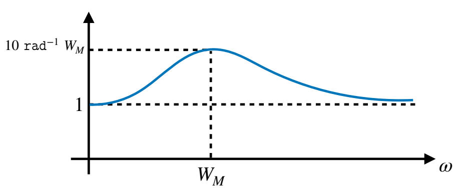
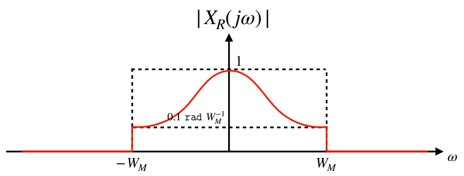


Figura 6: Respuesta en frecuencia.

(h) Como:

$$X_M(j\omega) = H(j\omega)X_R(j\omega) \Rightarrow X_R(j\omega) = \begin{cases} X_M(j\omega)H^{-1}(j\omega), & -W_M < \omega < W_M \\ 0, & \texttt{otro caso} \end{cases}$$

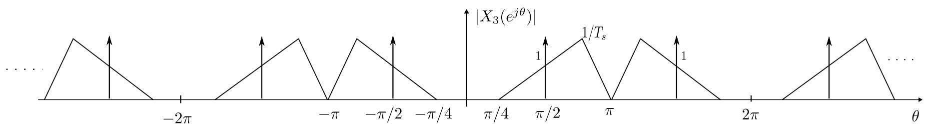
El bosquejo resulta



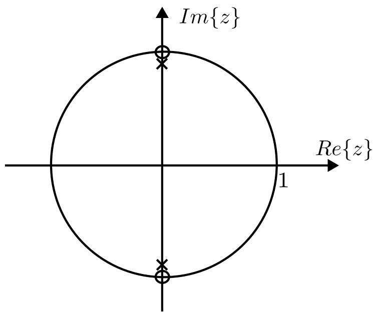
Problema 2

(a) El ancho de banda de la señal es 4000π por lo que la frecuencia de muestreo debe ser almenos el doble, es decir que la frecuencia mínima es $w_s = 8000\pi$

(b) El espectro de $x_3[n]$ es:



(c) El diagrama de polos y ceros de $H_a(z)$ es el siguiente:



(d) Un filtro causal de orden 2 tiene la forma:

$$H(z) = A\frac{(z-c_1)(z-c_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Los ceros deben anular las frecuencias $\pm\pi/2$ por lo que $c_1 = e^{j\pi/2} = j$, y $c_1 = e^{-j\pi/2} = -j$

Entonces, los polos son $p_1 = 0.99j$ y $p_2 = -0.99j$

Por lo tanto:

$$H(z) = A\frac{(z-j)(z+j)}{(z-0.99j)(z+0.99j)}$$

evaluando en $z = 1$ queda $|H(1)| \approx |A|$, por lo que si tomamos $A = 1$ cumplimos con lo pedido.

(e) Un sistema es BIBO estable si para toda entrada acotada, su salida es acotada. La condición necesaria y suficiente sobre la respuesta al impulso $h_a[n]$ es que sea absolutamente sumable, es decir:

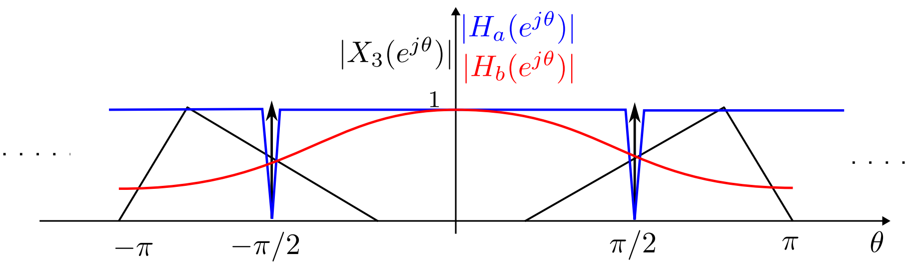
$$\sum |h_a[n]| < \infty$$

(f) Los polos tienen módulo 0.99 por letra por lo que están dentro del círculo unidad. Dado que el sistema es causal, la zona de convergencia incluye a la circunferencia unidad y por lo tanto el sistema es estable.
Si un sistema causal tiene todos los polos dentro de la círculo unidad, entonces todos sus módulos son menores a 1. Antitransformando una descomposición en fracciones simples, se tiene que todos los términos serán exponenciales decrecientes "hacia la derecha", por lo que cada uno de ellos converge. Por lo tanto, usando la desigualdad triangular se puede acotar la suma del valor absoluto de la respuesta al impulso, que es la condición de la parte anterior.

(g) Transformando la respuesta al impulso se tiene:

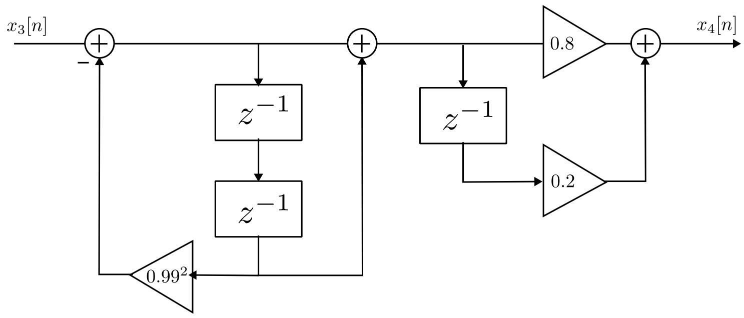
$$H_b(z) = 0.8 + 0.2z^{-1}$$

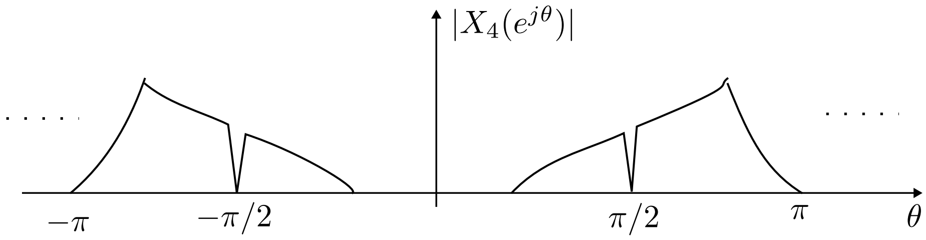
(h) En la figura se muestra $X_3(e^{j\theta})$, junto a las respuestas en frecuencia de los filtros en color azul y rojo.



(i) Un posible diagrama de bloques utilizando la mínima cantidad de retardos es utilizando la implementación canónica de H_a y H_b en cascada:

(j) El bosquejo espectro luego de aplicar los dos filtros tiene la forma:


$x_3[n]$
$x_4[n]$
z^{-1}
z^{-1}
z^{-1}
0.8
0.2
0.99^2


$|X_4(e^{j\theta})|$
$-\pi$
$-\pi/2$
$\pi/2$
π
θ