Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

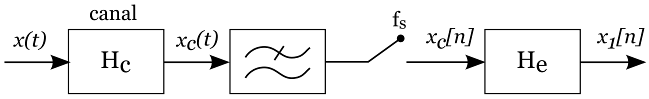
18 de febrero de 2022

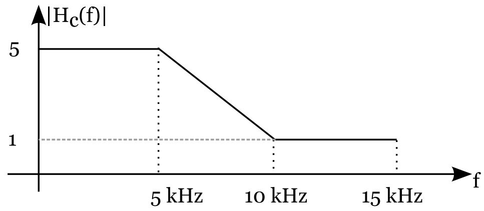
Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 8:30 y culmina a las 12:00. A partir de las 12:00 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del examen consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen febrero 2022) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de supreferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Una señal de audio $x(t)$ de ancho de banda 15 kHz es transferida a través de un canal que tiene una respuesta en frecuencia $H_c(f)$, recibiéndose $x_c(t)$ a la salida del canal como se muestra en la figura. Se desea recuperar la señal $x(t)$ en tiempo discreto, por lo que se filtra la señal muestreada $x_c[n]$ con un filtro ecualizador H_e que compensa los efectos del filtro H_c. En la salida de H_e se obtiene una secuencia $x_1[n]$ que deberá ser lo más parecida posible a $x[n]$, muestras de $x(t)$.





(a) Hallar la mínima frecuencia de muestreo f_s para que el sistema funcione correctamente. Indicar la función del filtro pasabajos y hallar su frecuencia de corte.

En el resto del ejercicio se utilizará la frecuencia de muestreo f_s hallada en la parte anterior.

(b) Hallar la respuesta frecuencia de un filtro en tiempo discreto $H_c(e^{j\theta})$ cuyos efectos sean los mismos que produce $H_c(f)$, de modo de poder estudiar todo el sistema en tiempo discreto.

El filtro H_e será real, causal, y de la forma

$$H_e(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}.$$

Idealmente el filtro H_e cumpliría

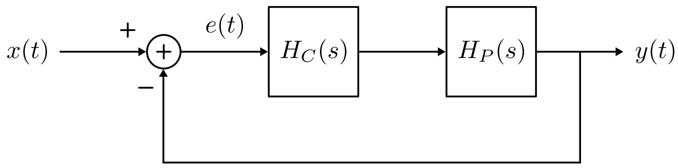
$$|H_c(e^{j\theta})H_e(e^{j\theta})| = 1.$$

(c) Hallar a y b de forma que $|H_c(e^{j\theta})H_e(e^{j\theta})| = 1$ en las frecuencias $\pi/2$ y π.

(d) Dar un diagrama de bloques del filtro $H_e(z)$, estudiar la estabilidad del filtro obtenido y bosquejar su respuesta en frecuencia.

Problema 2

Considerar el sistema realimentado S de la figura, con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. El sistema completo se compone de una sistema a controlar, con transferencia $H_P(s)$ y un sistema controlador, con transferencia $H_C(s)$. La señal $e(t)$ se denomina *error de seguimiento*.



(a) Calcular las transferencias $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ y $R(s) = \frac{E(s)}{X(s)}$.

A partir de aquí, considerar $H_P(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Primero considerar el caso $H_C(s) = K$, $K \in R$.

(b) Determinar una condición para K que asegure que el sistema S sea estable. Para este caso, realizar el diagrama de ceros y polos para el sistema S, así como su respuesta en frecuencia.

(c) En condiciones de estabilidad, demostrar que el error de seguimiento tiende a cero cuando $x(t) = \delta(t)$.

(d) En condiciones de estabilidad, demostrar que el error de seguimiento NO tiende a cero cuando $x(t) = u(t)$.

Ahora considerar el caso $H_C(s) = K_1 + \frac{K_2}{s}$, $K_1,\ K_2 \in R$.

(e) Demostrar que existen valores de K_1 y K_2 que aseguren que el sistema S sea estable.

(f) En condiciones de estabilidad, demostrar que el error de seguimiento tiende a cero cuando $x(t) = u(t)$.

Solución

Problema 1

(a)

$$f_s = 30\,\text{kHz}$$

El filtro tiene frecuencia de corte 15 kHz y debe estar para asegurar que se cumpla el teorema de muestreo para cualquier señal de entrada.

(c) Se tiene que $|H_c(e^{j\pi/2})||H_e(e^{j\pi/2})| = 1$ entonces $3|H_e(e^{j\pi/2})| = 1$ obteniendo

$$\left|\frac{b}{1+aj}\right| = \frac{1}{3}$$

$$9b^2 = 1 + a^2$$

Por otro lado $|H_c(e^{j\pi})||H_e(e^{j\pi})| = 1$

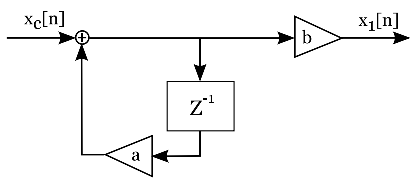
$$H_c(-1) = \frac{b}{1+a} = 1$$

De ambas condiciones se obtiene la ecuación

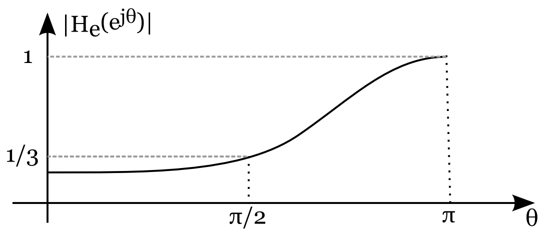
$$a^2 + 3a + 1 = 0$$

La ecuación tiene dos soluciones. La solución $a = -1.64$ corresponde a un sistema causal inestable y la solución $a = -0.61$ y $b = 1.61$ corresponde a un sistema causal estable.

(d)



La solución correspondiente a $a = -1.64$ tiene un polo fuera del cÃrculo unidad por lo que la regi'on de convergencia correspondiente al filtro causal no es estable.
La solución correspondiente a $a = -0.61$ y $b = 1.61$ tiene un polo dentro del círculo unidad por lo que la región de convergencia correspondiente al filtro causal es estable.
En la figura se bosqueja la respuesta en frecuencia del filtro.



Problema 2

(a)

$$(X(s) - Y(s))H_C(s)H_P(s) = Y(s) \Rightarrow G(s) = \frac{H_C(s)H_P(s)}{1 + H_C(s)H_P(s)}$$

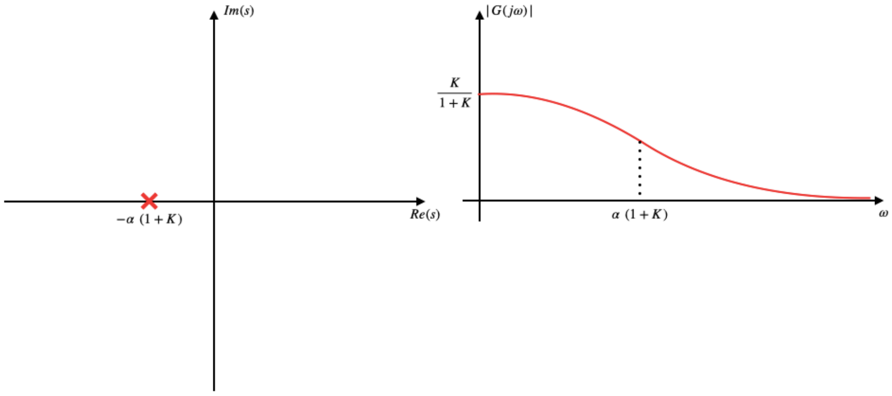
$$E(s)H_C(s)H_P(s) = Y(s) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{1 + H_C(s)H_P(s)}$$

(b) La transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{KH_P(s)}{1 + KH_P(s)} = \frac{K\alpha}{s + \alpha + K\alpha}.$$

Por lo tanto, para asegurar la estabilidad se debe cumplir:

$$\alpha(1 + K) > 0$$



(c)

$$E(s) = R(s)X(s) = R(s) = \frac{s + \alpha}{s + \alpha + K\alpha}.$$

Como el sistema es estable, se puede afirmar que $sE(s) = sR(s)X(s) = sR(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho cerrado, por lo tanto podemos aplicar el teorema del valor final:

$$e(+\infty) = \lim_{t \to 0} sR(s) = 0.$$

(d) Como el sistema es estable, se puede afirmar que $sE(s) = sR(s)X(s) = R(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho cerrado, por lo tanto podemos aplicar el teorema del valor final:

$$e(+\infty) = \lim_{t \to 0} R(s) = \frac{1}{1 + K}.$$

(e) La transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{\alpha(sK_1 + K_2)}{s^2 + s\alpha(1 + K_1) + \alpha K_2}.$$

Los coeficientes del denominador dependen tanto de K_1 como K_2, por lo que es posible elegir sus valores para que los polos tengan parte real negativa. Existen infinitas combinaciones que cumplen con el objetivo, por ejemplo eligiendo un valor de K_2 suficientemente grande como para tener polos complejos conjugados y elegir K_1 para que su parte real sea negativa.

(f) Como el sistema es estable, se puede afirmar que $sE(s) = sR(s)X(s) = R(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho cerrado, por lo tanto podemos aplicar el teorema del valor final:

$$e(+\infty) = \lim_{t \to 0} R(s) = 0.$$