Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

14 de diciembre de 2021

Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 8:00 y culmina a las 11:30. A partir de las 11:30 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes y su zona de trabajo. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del examen consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen 2021-12-14) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de su preferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma *aproximado* para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Considerar un sistema causal H en tiempo discreto que es lineal e invariante en el tiempo. El sistema H está determinado por la siguiente transferencia

$$H(z) = z^{-1}\frac{1-\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(a) Dibujar el diagrama de polos y ceros de H.

(b) Indicar si el sistema H es BIBO estable. Justificar la respuesta.

(c) Dar un diagrama de bloques con la mínima cantidad de retardos que implemente H.

(d) Hallar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ y la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

(e) Mostrar que el módulo de la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ es igual a uno para todas las frecuencias.

(f) Calcular la fase de la respuesta en frecuencia en función de θ, $\angle H(e^{j\theta})$.

(g) Mostrar que el retardo de grupo $\tau(\theta)$ queda determinado por la expresión

$$\tau(\theta) = \frac{3/4}{5/4 - \cos\theta}.$$

Bosquejar el retardo de grupo en función de θ.
Nota: puede ser útil la expresión $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = 1/(1+x^2)$

(h) Hallar la salida para la entrada $\cos(\pi n/3)$ en base a la ganancia en módulo y el retardo de grupo de H.

Problema 2

Una forma de convertir un filtro pasabajos en uno pasaaltos en tiempo continuo es realizar el cambio de variable $s \leftrightarrow 1/s$, esto es,

$$G(s) = H(1/s).$$

Considerar

$$H(s) = \frac{1}{s + 1/2}.$$

(a) Obtener $G(s)$ como cociente de polinomios.

(b) Bosquejar los diagramas de polos y ceros de $H(s)$ y $G(s)$ causales, incluyendo sus regiones de convergencia, indicando para cada uno de ellos si es estable o inestable.

(c) Determinar si existen las respuestas en frecuencia de los filtros H y G, y en caso afirmativo bosquejarlas.

(d) Determinar si los filtros $H(s)$ y $G(s)$ son pasabajos, pasaaltos o ninguno de los dos.

(e) Obtener una ecuación diferencial lineal, de coeficientes constantes, que represente al filtro $H(s)$ con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Repetir para $G(s)$.

Ahora considerar el caso general en que $H(s)$ es un cociente de polinomios con ecuación diferencial de coeficientes constantes asociada

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x}{dt^k},$$

con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$. Sin pérdida de generalidad se asume la misma cantidad de derivadas N en ambos lados de la ecuación, pero se considera que algunos coeficientes pueden ser nulos, excepto a_N y a_0.

(f) Determinar $H(s)$ y $G(s)$.

(g) Determinar la ecuación diferencial asociada a $G(s)$ con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$.

Solución

Problema 1

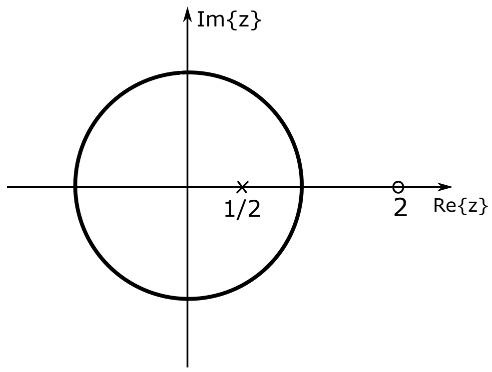


Figura 1: Diagrama de polos y ceros de H.

(a)

(b) El sistema tiene un solo polo en $z = 1/2$ por lo que todos los polos estÃ¡n dentro de la circunferencia unidad. Al ser causal, la cfa unidad queda contenida dentro de la ROC por lo que el sistema es estable.

(c) Es un sistema de primer orden por lo que es necesario sólo un elemento de retardo para implementarlo en la forma canónica.

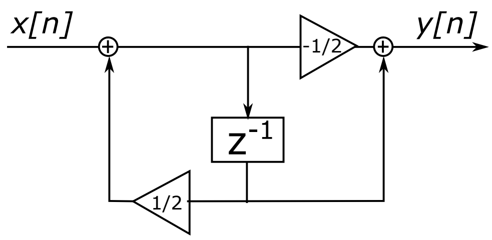


Figura 2: Diagrama de polos y ceros de H.

(d) La respuesta en frecuencia es:

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j\theta}\frac{1 - \frac{1}{2}e^{j\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\theta}}$$

La respuesta al impulso es:

$$h[n] = u[n-1]\frac{1}{2}^{n-1} - u[n]\frac{1}{2}^{n+1}$$

(e) Se puede ver que el módulo de $e^{-j\theta}$ es siempre uno y que los dos términos de la fracción para $z = e^{j\theta}$ son complejos conjugados ya que $(e^{j\theta})^* = e^{-j\theta}$ por lo que ambos tienen igual módulo por lo que su cociente tiene módulo uno. Finalmente el producto de ambos es también igual a uno.

(f) Operando se tiene:

$$\angle H(e^{j\theta}) = -\theta - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}\right)$$

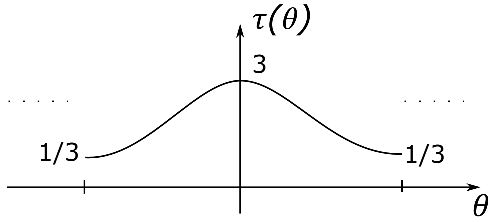


Figura 3: Diagrama de polos y ceros de H.

(g)

(h) Por los resultados de las partes anteriores, el módulo no cambia por lo que la salida será la entrada retardada tanto como sea el retardo de grupo en $\pm\pi/3$.
Evaluando $\tau(\pi/3) = \tau(\pi/3) - \pi/3) = 1$.
Finalmente, la salida será igual a la entrada pero retardada una muestra:

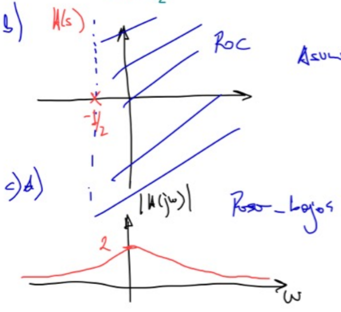
$$\cos\left(\pi(n-1)/3\right)$$

Problema 2

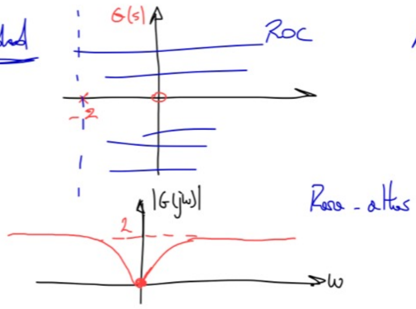
(a)

a) $H(s)=\dfrac{1}{s+1/2} \Rightarrow G(s)=\dfrac{1}{\frac{1}{s}+1/2}=\dfrac{s}{1+s\cdot 1/2}=\dfrac{2s}{2+s}$

b) Asumiendo causalidad



c) d)



Ambos BIBO estable

e) $Y(s)=\dfrac{1}{s+1/2}X(s) \Rightarrow \left(s+1/2\right)Y(s)=X(s)$

$\Rightarrow \boxed{\dot{y}+1/2\, y = x}$

$Y(s)=\dfrac{2s}{2+s}X(s) \Rightarrow (2+s)Y(s)=2sX(s)$

$\Rightarrow \boxed{2y+\dot{y}=2\dot{x}}$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k}=\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x}{dt^k} \xRightarrow{\mathcal{L}} \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s)=\sum_{k=0}^{N} b_k s^k X(s)$

$\Rightarrow \boxed{H(s)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}} \Rightarrow G(s)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N} b_k \left(\frac{1}{s}\right)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{1}{s}\right)^k}=\dfrac{\left(\frac{1}{s}\right)^N \sum_{k=0}^{N} b_k s^{(N-k)}}{\left(\frac{1}{s}\right)^N \sum_{k=0}^{N} a_k s^{(N-k)}}$

$\Rightarrow \boxed{G(s)=\dfrac{\sum_{k=0}^{N} b_k s^{N-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^{N-k}}=\dfrac{\sum_{k=0}^{N} b_{N-k} s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_{N-k} s^k}} \Rightarrow$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_{N-k}\frac{d^k y}{dt^k}=\sum_{k=0}^{N} b_{N-k}\frac{d^k x}{dt^k}$