Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

22 de julio de 2021

Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 8:00 y culmina a las 11:30. A partir de las 11:30 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes y su zona de trabajo. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del examen consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen julio 2021) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de supreferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma *aproximado* para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Una planta embotelladora de cerveza contiene un tanque con el preciado liquido listo para ser inyectado en las botellas. El tanque (ver figura 1) es cilíndrico, de sección uniforme A, al cual ingresa un caudal de cerveza q_i por su parte superior y egresa un caudal q_o desde su parte inferior. Por motivos de seguridad, el tanque siempre contendrá un volumen de cerveza tal que la altura del líquido será mayor a Z_0.
Siendo $z(t)$ el nivel de cerveza en el tanque respecto al nivel de seguridad Z_0, la dinámica de llenado/vaciado del tanque es modelada de la forma:

$$q_i(t) - q_o(t) = A\frac{dz(t)}{dt}$$

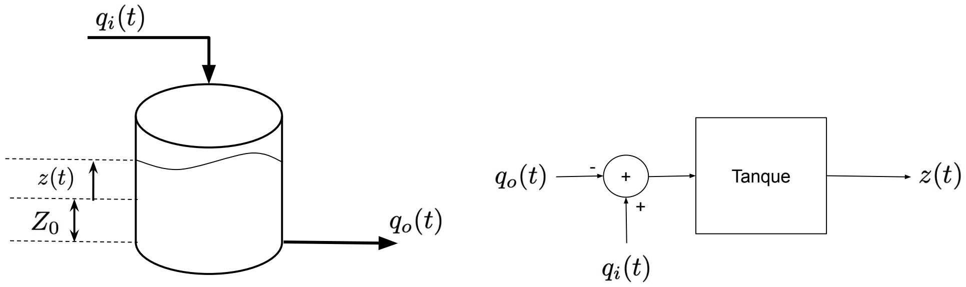

Figura 1: Tanque de cerveza.

Se desea controlar el ingreso de cerveza al tanque de forma tal de mantener su nivel en cierto valor de referencia, dado por la señal $z_R(t)$ (también medida respecto al nivel de seguridad Z_0). Para lograrlo, se implementa un sistema que permite ingresar la cerveza según la siguiente ley:

$$q_i(t) = \alpha\ (z_R(t) - z(t)) + \beta\, q_o(t - T)$$

con T real positivo (que modela el retardo con el que se puede medir el caudal de salida), y α y β reales cualesquiera a diseñar.

(a) Completar el diagrama de bloques de la figura 1 para representar el sistema donde figuren las señales q_i, q_o, z y z_R.

Considerar $z_R(t) = 0$.

(b) Hallar la transferencia $G(s) = \frac{Z(s)}{Q_o(s)}$.

(c) Determinar las condiciones que deben de cumplir α y β para que el sistema sea estable.

(d) Calcular la respuesta al impulso del sistema.

(e) Con la respuesta al impulso anterior, corroborar que se cumple la condición de estabilidad.

Para evaluar el comportamiento del sistema, se formula un escenario con un valor de referencia fijo

$$z_R(t) = u(t)Z_R,\ Z_R > 0,$$

$z(0) = 0$ y un caudal de salida constante

$$q_o(t) = u(t)Q_0,\ Q_0 > 0.$$

(f) Determinar las condiciones que deben verificar α y β para que $z(t) \to 1.1Z_R$ para $t \to +\infty$. Justificar.

(g) Con las condiciones de la parte anterior, determinar $z(t),\ \forall t > 0$.

Problema 2

Se desea monitorear la marea mediante un sistema en tiempo discreto. Para esto se muestrea una señal de tiempo continuo $x_s(t)$ que indica la altura del agua. Se considera que las componentes frecuenciales de período menor a una hora no son de interés.

(a) Establecer el ancho de banda de la señal de interés y la frecuencia de muestreo f_s mínima para representarla sin pérdida de información. Indicar cómo debe procesarse la señal para ser correctamente representada con sus muestras.

A partir de ahora se trabajará con la f_s hallada en la parte anterior. Se le llamará $x[n]$ a la señal muestreada.
Se asume que hay tres componentes en la señal. Una corresponde a las olas $x_0(t)$ y tiene un período de oscilación de aproximadamente 10 segundos. Otra corresponde a la variación de la marea en el día $x_1(t)$, con un período de 24 horas. La tercera corresponde a la variación de la marea debido a la Luna $x_2(t)$, es decir que tiene un período de 29,5 días.
Se modela la señal de entrada como $x_s(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$, con $x_i(t) = a_i \cos(w_i t)$, donde se asume conocidas las frecuencias w_i y se desea estimar los a_i

(b) Graficar el espectro de las señales $x_s(t)$ y $x[n]$ asumiendo $a_i = 1$.

La componente correspondiente a la Luna se obtendrá con filtro causal H_2 de la forma: $y[n] = \alpha x[n] + (1 - \alpha)y[n-1]$

(c) Hallar la transferencia $H_2(z)$ y dar su diagrama de polos y ceros.

(d) Hallar la condición sobre α para que H_2 sea estable y verificar que se cumple para $\alpha = 10^{-5}$

(e) Hallar la respuesta en frecuencia de H_2 y bosquejar su módulo para $\alpha = 10^{-5}$.

La componente correspondiente a la variación diaria se estimará con un filtro causal con transferencia:

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - 0.999e^{j\theta_1}z^{-1})(1 - 0.999e^{-j\theta_1}z^{-1})}$$

(f) Dibujar el diagrama de polos y ceros de H_1.

(g) Indicar qué valor de θ_1 usaría para obtener la componente de variación diaria.

(h) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia de H_1 para el valor de θ_1 hallado en la parte anterior.

(i) Proponer un método de estimación del módulo de a_1 y de a_2 en base a la salida de los filtros H_1 y H_2.

Solución

Problema 1

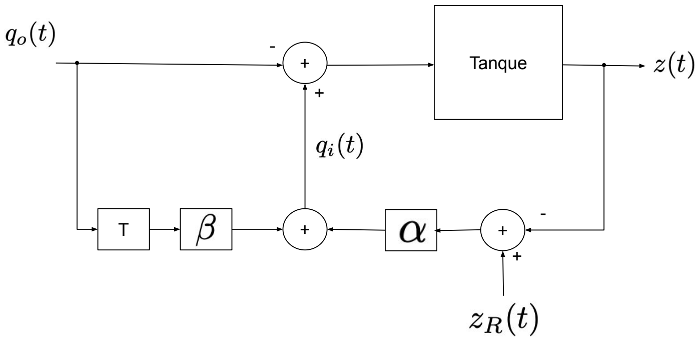

Figura 2: Diagrama de bloques.

(a)

(b) Las relaciones en Laplace son:

$$Q_i(s) = \alpha\left[Z_R(s) - Z(s)\right] + \beta Q_0(s)e^{-Ts},\ Q_i(s) - Q_o(s) = AsZ(s)$$

Con $Z_R(s) = 0$, la transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{\beta e^{-Ts} - 1}{As + \alpha}$$

(c) El sistema tiene un único polo de valor $s_0 = -\alpha/A$ el cual tendrá parte real negativa (asegurando la estabilidad) siempre que:

$$\alpha > 0,\ \beta \in \mathrm{R}$$

(d) La anti-transformada de $G(s)$ será la respuesta al impulso del sistema:

$$G(s) = \frac{\beta}{A}\left(\frac{1}{s + \alpha/A}\right)e^{-Ts} - \frac{1}{A}\left(\frac{1}{s + \alpha/A}\right)$$

$$\Rightarrow g(t) = S(\delta) = \frac{\beta}{A}u(t-T)e^{-(\alpha/A)(t-T)} - \frac{1}{A}u(t)e^{-(\alpha/A)t}$$

(e) Debido a la condición de estabilidad calculada en la parte anterior ($\alpha > 0$), se puede afirmar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| < \infty$$

y por lo tanto el sistema efectivamente es estable.

(f) Dadas las relaciones en Laplace que modelan el sistema:

$$Q_i(s) = \alpha\left[Z_R(s) - Z(s)\right] + \beta Q_0(s)e^{-Ts},\ Q_i(s) - Q_o(s) = AsZ(s)$$

Entonces:

$$Z(s) = \frac{\alpha Z_R(s) + \beta Q_0(s)e^{-Ts}}{As + \alpha} = \frac{\alpha\frac{Z_R}{s} + \beta\frac{Q_0}{s}e^{-Ts}}{As + \alpha}$$

Con $\alpha > 0$, resulta que $sZ(s)$ no tiene polos con parte real en el semiplano derecho cerrado, por lo que se verifican las hipótesis del teorema del valor final:

$$z(+\infty) = \lim_{s\to 0} sZ(s) = \frac{\alpha Z_R + \beta Q_0}{\alpha} = 1.1 Z_R \Rightarrow \beta = 0.1 \times \frac{\alpha Z_R}{Q_0}$$

Por lo tanto, las condiciones son:

$$\alpha > 0,\ \beta = 0.1 \times \frac{\alpha Z_R}{Q_0}$$

(g)

$$\alpha Z_R/A \frac{1}{s(s+\alpha/A)} + \beta Q_0/A \frac{1}{s(s+\alpha/A)} e^{-Ts}$$

$$\Rightarrow Z(s) = Z_R \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha/A}\right] + 0.1 \times Z_R \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha/A}\right] e^{-Ts}$$

$$\Rightarrow z(t) = u(t) Z_R \left[1 - e^{(-\alpha/A)t}\right] + u(t-T) 1.1 \times Z_R \left[1 - e^{(-\alpha/A)(t-T)}\right]$$

Problema 2

(a) El ancho de banda de la señal es $w_x = 2\pi/T = 2\pi/(3600) rad/s = 0.00175 rad/s$. La mínima frecuencia de muestreo es de una muestra cada media hora, para eso hay que filtrar la señal con un pasabajos con frecuencia de corte $w_c = w_x = 0.00175 rad/s$ para que la señal sea representada sin pérdida en el rango de frecuencias de interés.
La frecuencia de muestreo será $w_c = 2w_c = 0.0035 rad/s$ o $f_s = 1/1800 Hz$.

(b) El espectro de la señal en tiempo discreto está compuesto por tres pares de deltas, en las frecuencias $\pm 2\pi/10$, $\pm 2\pi/(24*60*60)$ y en $\pm 2\pi/(29,5*24*60*60)$
La componente de mayor frecuencia, que corresponde a las olas se elimina con el pasabajos y sobreviven las dos componentes de menor frecuencia. Para pasar a las frecuencias en tiempo discreto se debe dividir entre f_s. Por lo que en el período principal habrá componentes en $\pm\theta_1 = \pm 2\pi/(24*60*60)*1800 = \pm\pi/24$ correspondientes a la variacieon diaria y en $\pm\theta_2 = \pm 2\pi/(24*60*60*29.5)*1800 = \pm\pi/(24*29.5)$.

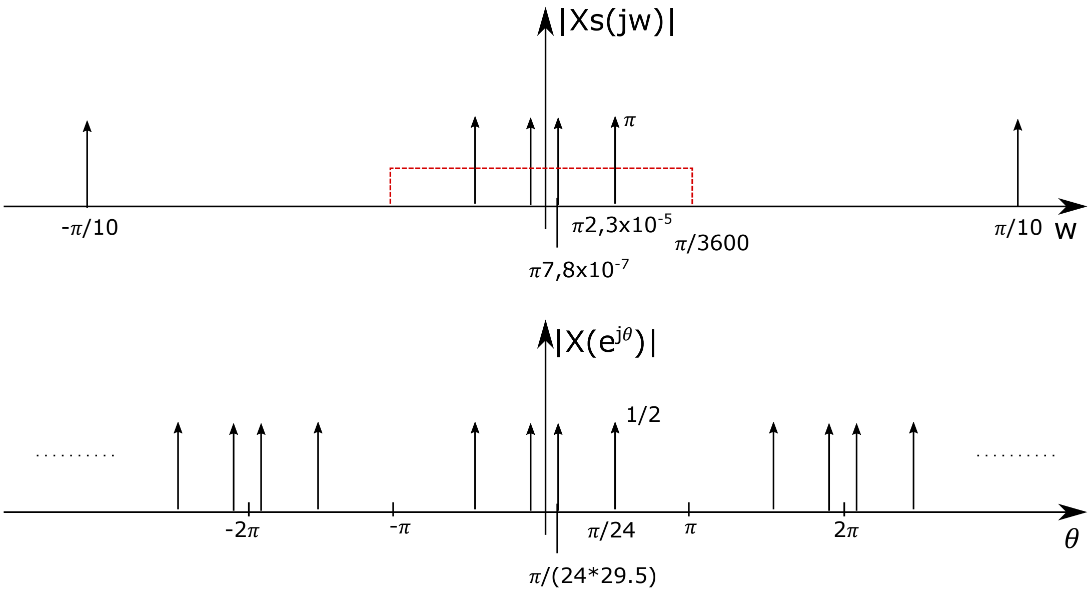

Figura 3: Espectros.

(c) La transferencia del sistema es;

$$H_2(z) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^-1}$$

Tendrá un polo en el eje real en el valor $1-\alpha$.

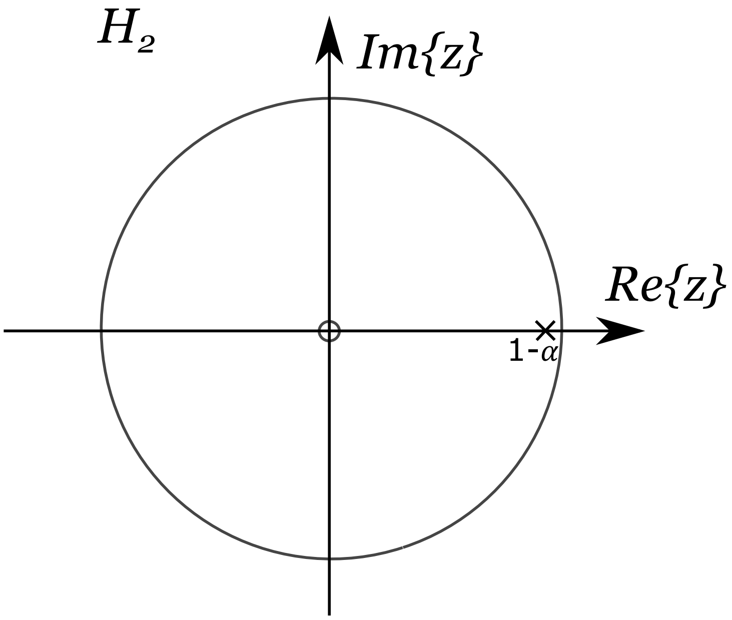

Figura 4: Diagrama de polos y ceros de H_2.

(d) Como es causal, para que sea estable el polo debe estar dentro del círculo unidad, de forma que la región de convergencia contenga a la circunferencia unidad.
Como $1-\alpha = 1-10^{-5}$ tiene módulo menor a uno, se cumple la condición de estabilidad.

(e)

$$H_2(e^{j\theta}) = \frac{10^{-5}}{1-(1-10^{-5})e^{-j\theta}}$$

Tendrá una respuesta máxima igual a uno para frecuencia nula y una caída de la respuesta en módulo pronunciada a medida que aumenta la frecuencia llegando a un mínimo en módulo en π aproximadamente igual a $5x10^{-6}$.

(f) El diagrama de polos y ceros corres tiene dos polos complejos conjugados dentro de la circunferencia unidad y muy cercanos a ella, con un argumento $\pm\theta_1$ y un cero en $z=1$. El filtro funcionará como un pasabanda teniendo un máximo pronunciado den las freciencias $\pm\theta_1$ y anulando la componente de continua.

(g) El valor de θ_1 tiene que ser igual a la frecuencia correspondiente a la componente de la variación diaria, es decir $\theta_1 = pi/24$.

(h) Para $\theta_1 = pi/24$:

(i) Asumiendo que en la salida de los filtros propuestos sólo se obtiene las componentes correspondientes, una forma de estimar a_1 y a_2 corresponde en tomar el valor máximo del módulo de la salida de dichos filtros por un tiempo mayor al período correspondiente a cada componente. Además se debe corregir la ganancia de los filtros, para esto se debe dividir el valor del máximo obtenido entre el módulo de la respuesta en frecuencia del fitro correspondiente en la frecuencia de la componente considerada.

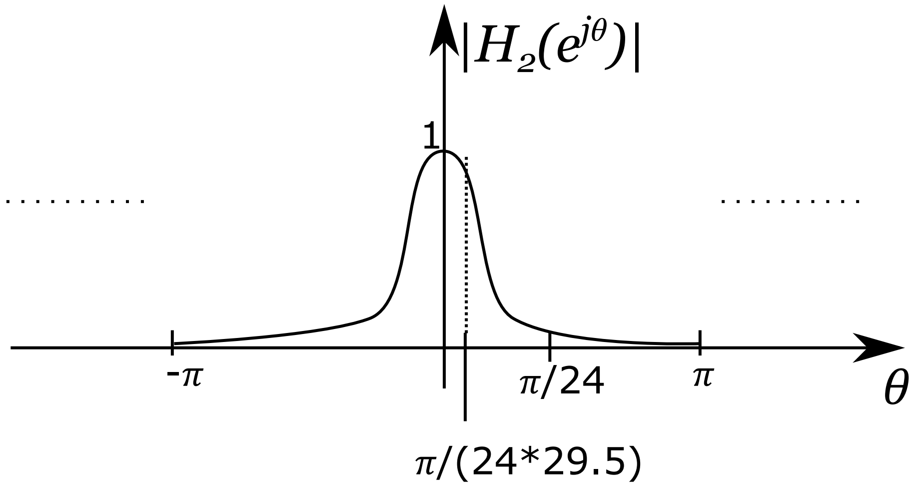

Figura 5: Módulo de la respuesta en frecuencia de H_2.

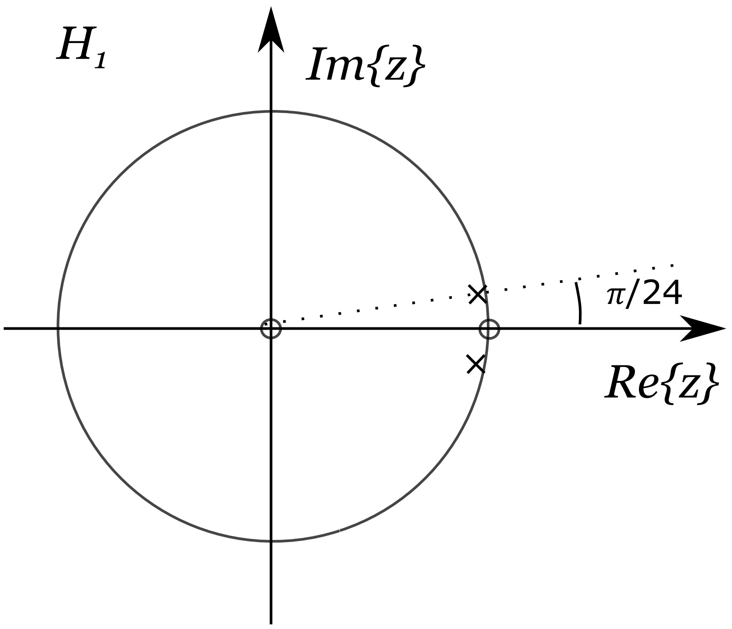

Figura 6: Diagrama de polos y ceros de H_1.

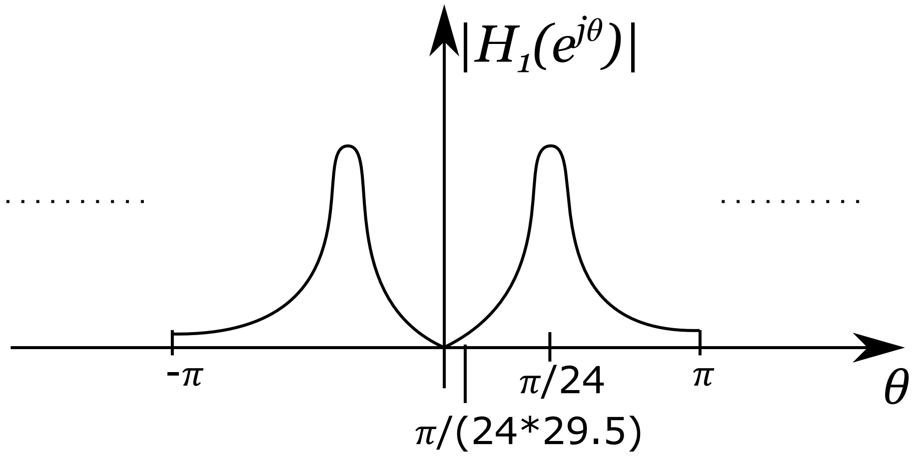

Figura 7: Módulo de la respuesta en frecuencia de H_1.