Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

23 de febrero de 2021

Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 10:00 y culmina a las 13:30. A partir de las 13:30 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del examen consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen febrero 2021) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de su preferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0\omega_A\frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1\frac{\omega_A}{10}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100}y(t)$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ es la salida y se cumple que: $\zeta_0^2 \leq 1$, $\zeta_1^2 \leq 1$ y $\omega_A > 0$. Adicionalmente, las condiciones iniciales se supondrán nulas.

(a) Hallar la transferencia del sistema, $H(s)$.

(b) Demostrar que el módulo de los ceros y de los polos de $H(s)$ es ω_A y $\frac{\omega_A}{10}$ respectivamente.

(c) Para un valor de ω_A dado, dibujar el lugar geométrico de los ceros y los polos de $H(s)$ al variar ζ_0 y ζ_1 en el intervalo [-1,1]. Justificar detalladamente.

(d) Hallar las condiciones en los parámetros ζ_0, ζ_1 y ω_A para que el sistema sea BIBO estable.

(e) Para el caso $\zeta_1 = 1$ y $\zeta_0 = 0$:

1. Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del sistema.
2. Hallar la respuesta en régimen del sistema ante una entrada escalón unitario.

(f) Considere ahora el caso $\zeta_1 < 0$. El sistema $H(s)$ es realimentado mediante una sistema de ganancia $K > 0$. Demostrar que no es posible estabilizar el sistema para ningún valor de K.

Problema 2

Considerar el sistema causal de tiempo discreto, de entrada $x[n]$ y salida $y[n]$, dado por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = \alpha y[n-1] + x[n], \quad \alpha > 0.$$

(a) Demostrar que el sistema es lineal e invariante en el tiempo.

(b) Obtener la repuesta al impulso del sistema $h[n]$, y determinar a partir de $h[n]$ los valores de α para que el sistema sea estable.

(c) Hallar la transferencia del sistema $H(z)$, bosquejar su diagrama de polos y ceros, e indicar a partir de $H(z)$ para qué valores de α el sistema es estable. Justificar.

De aquí en más puede asumirse que el sistema es estable.

(d) Utilizando el producto de convolución, demostrar que si la señal de entrada es periódica de período N, entonces la salida también es periódica de período N.

(e) Utilizar el producto de convolución para determinar la salida $y_1[n]$ cuando la entrada es $x_1[n] = \cos(\pi n) = (-1)^n$, y graficar $x_1[n]$ e $y_1[n]$ en un período.

(f) Hallar y bosquejar $X_1(e^{j\theta})$ e $Y_1(e^{j\theta})$, siendo éstas las transformadas de tiempo discreto de Fourier de $x_1[n]$ e $y_1[n]$, indicando sus periodicidades. Hallar $y_1[n]$ antitransformando $Y_1(e^{j\theta})$.

(g) Repetir la parte anterior para una entrada $x_2[n] = \cos(\pi n/2)$.

(h) Obtener $y_2(t)$ que resulta de reconstruir $y_2[n]$ con un reconstuctor ideal correspondiente a un muestreo de período $T_s = 1$ ms. Indicar el ancho de banda de $y_2(t)$ en Hz. Justificar.

Solución

Problema 1

(a)

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_0\omega_A s + \omega_A^2}{s^2 + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} s + \frac{\omega_A^2}{100}}$$

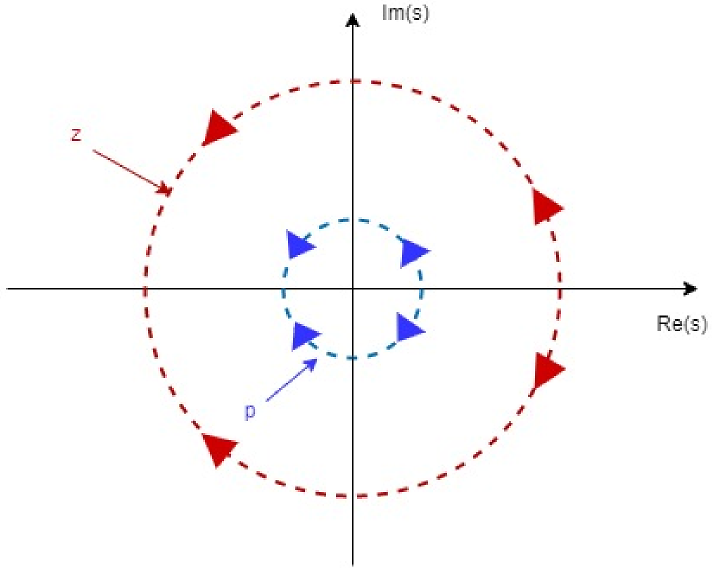
(b) Los ceros valen:

$$z_0 = -\zeta_0\omega_A \pm j\omega_A\sqrt{1-\zeta_0^2} \Rightarrow |z_0|^2 = \omega_A^2$$

Del mismo modo, los polos del sistema valen:

$$p_0 = -\zeta_1\frac{\omega_A}{10} \pm j\frac{\omega_A}{10}\sqrt{1-\zeta_1^2} \Rightarrow |p_0|^2 = \frac{\omega_A^2}{100}$$

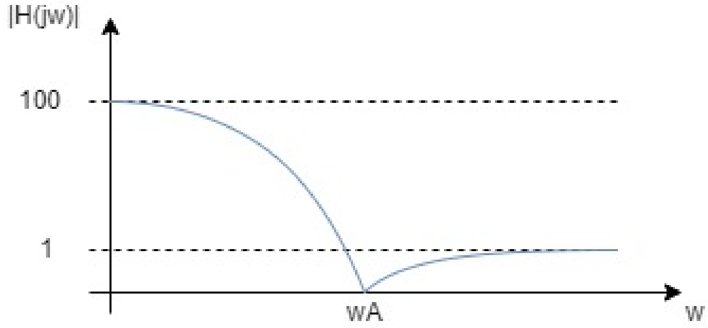
(c) El módulo de los ceros y de los polos se mantiene constante al mantener el parámetro ω_A fijo. Al variar el parámetro ζ_0, los ceros del sistema describen un arco de circunferencia, desde el complejo $z(\zeta_0 = -1) = \omega_A + j0$ hasta $z(\zeta_0 = +1) = -\omega_A + j0$. Para $\zeta_0 = 0$, los ceros valen: $z(\zeta_0 = 0) = 0 + \pm j\omega_A$. Al variar el parámetro ζ_1, los polos del sistema describen un arco de circunferencia, desde el complejo $p(\zeta_1 = -1) = \frac{\omega_A}{10} + j0$ hasta $p(\zeta_1 = +1) = -\frac{\omega_A}{10} + j0$. Para $\zeta_1 = 0$, los polos valen: $p(\zeta_1 = 0) = 0 + \pm j\frac{\omega_A}{10}$.



(d) A partir del lugar geométrico visto en la parte anterior, podemos observar que no pueden existir cancelaciones cero-polo para ninguna combinación de parámetros. Esto significa que el sistema será BIBO estable si las raíces del denominador se encuentran en el semiplano izquierdo (sistema causal). Esto significa que el sistema será BIBO estable si y sólo si se cumple:

$$\zeta_1 > 0$$

(e)



Como el sistema es BIBO estable: $\lim_{t\to+\infty} y(t) = H(0) \times u(t) = 100u(t)$.

(f) La transferencia del sistema realimentado es:

$$G(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)}$$

cuyos polos son de la forma:

$$p = -\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \pm \frac{\omega_A}{10}\sqrt{\zeta_1^2 - 1 - 100K}$$

Como K es positivo y ζ_1 negativo, la expresión puede re-escribirse de la forma ($\zeta_1^2 <= 1$):

$$p = |\zeta_1| \frac{\omega_A}{10} \pm j \frac{\omega_A}{10}\sqrt{100K + 1 - \zeta_1^2}$$

Donde se observa que los polos tendrán parte real positiva $\forall K$.

Problema 2

(b) $h[n] = u[n]\alpha^n$. El sistema es estable si $h[n]$ es absolutamente sumable, en este caso $\alpha < 1$.

(c) $H(z) = 1/(1 - \alpha z^{-1}) \Rightarrow p = \alpha$. Al ser causal el sistema es estable para $alpha < 1$

(e) $y_1[n] = (-1)^n/(1 + \alpha)$. Alcanza con sumar las series de convolución para $y(0)$ e $y(1)$

(f)

$$X_1(e^{j\theta}) = \sum_l \pi \left(\delta(\theta - \pi - 2\pi l) + \delta(\theta + \pi + 2\pi l)\right)$$

$$H(e^{j\pi}) = 1/(1 + j\alpha)$$

$$Y_1(e^j\theta) = \sum_l \pi \left(\delta(\theta - \pi - 2\pi l) + \delta(\theta + \pi + 2\pi l)\right)/(1 + \alpha)$$

Son periódicas de período 2π.

(g)

$$X_2(e^j\theta) = \sum_l \pi \left(\delta(\theta - \pi/2 - 2\pi l) + \delta(\theta + \pi/2 + 2\pi l)\right)$$

$$H(e^{j\pi}) = 1/(1 + j\alpha)$$

$$Y_2(e^j\theta) = \sum_l \pi \left(\delta(\theta - \pi/2 - 2\pi l) + \delta(\theta + \pi/2 + 2\pi l)\right)/(1 + j\alpha)$$