Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

19 de diciembre de 2020

Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 10:00 y culmina a las 13:30. A partir de las 13:30 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del examen consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen diciembre 2020) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de su-preferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Sea $x[n]$ una secuencia que corresponde a muestras de una señal de voz tomada a 8000 muestras por segundo. Para eliminar interferencias en las frecuencias altas y bajas donde no hay potencia de señal, se decide filtrar $x[n]$ mediante un FIR $H(z)$ (causal) con ceros en $z = \pm 1$. Para tratar de aplanar la respuesta frecuencial en la banda central, se agregan otros dos ceros en $z = \pm j\alpha$, con $\alpha > 0$.

(a) Dibujar el diagrama completo de polos y ceros de H.

(b) Bosquejar la respuesta en frecuencia en base al diagrama de polos y ceros.

(c) Hallar la respuesta frecuencial de H. Notar que como está especificado, el filtro queda determinado a menos de una constante multiplicativa β. Asumir $\beta = 1$ a menos que se indique otra condición.

(d) Hallar $h[n]$, la respuesta al impulso de H.

(e) Estudiar estabilidad y linealidad de fase de H.

Como criterio para encontrar α, interesa que la respuesta frecuencial de H tenga igual módulo en las frecuencias θ correspondientes a 1000 Hz, 2000 Hz y 3000 Hz.

(f) Calcular posibles valores de α, y bosquejar las respuestas al impulso resultantes.

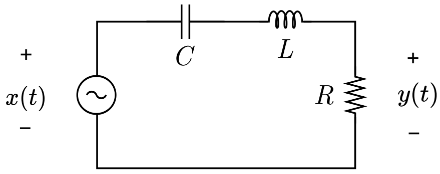
Se trabajará de ahora en más con el menor valor de los posibles α hallados.

(g) Calcular el factor multiplicativo β para que la respuesta en módulo en los tres puntos de interés valga 1.

(h) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro resultante.

Problema 2

Sea el circuito RLC serie de la figura con voltaje de entrada $x(t)$ y voltaje de salida en la resistencia $y(t)$.



(a) Hallar la transferencia en Laplace $H(s)$ y realizar el diagrama de polos y ceros, discutiendo en función de $R > 0$. Indicar para qué valores de R los polos son reales o complejos.

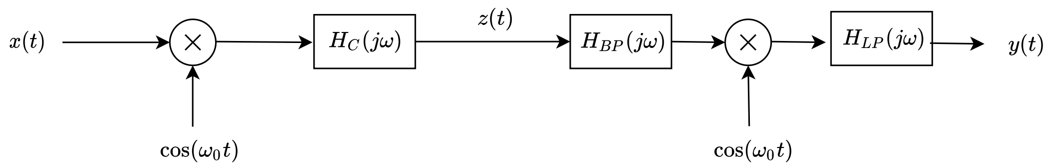
(b) Determinar si el sistema es estable discutiendo en función de $R > 0$. En el caso que sea estable calcular la respuesta en frecuencia $H_{RLC}(j\omega)$.

De aquí en más se trabajará en el caso en que el sistema es estable con polos complejos con parte imaginaria mucho mayor que la real.

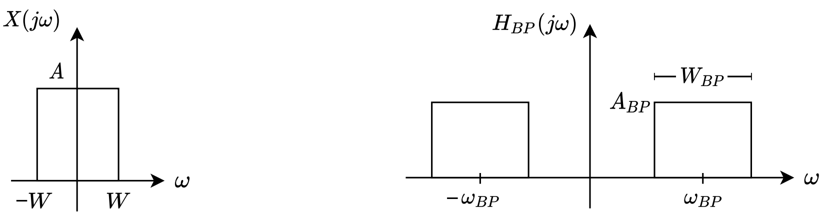
(c) Estimar la frecuencia y ganancia de resonancia **a partir del diagrama de polos y ceros**.

(d) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia.

A continuación se muestra un diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones.



El filtro H_C (con respuesta al impulso $h_c(t) = \alpha\,\delta(t - t_0)$) modela el canal de comunicación, siendo $z(t)$ la señal a su salida. El filtro H_{BP} pasabanda a la salida del canal es ideal de frecuencia central ω_{BP}, ancho W_{BP} y ganancia A_{BP}. La siguiente figura muestra una representación de este filtro, junto al espectro de la señal $x(t)$. El filtro H_{LP} a la salida es un pasabajos ideal de frecuencia de corte W y ganancia unitaria.



(e) Bosquejar el espectro de la señal $z(t)$. Indicar cuál es el mínimo valor de ω_0 para que no haya solapamiento.

(f) Determinar los parámetros ω_{BP}, A_{BP} y el mínimo W_{BP} del filtro pasabanda para recuperar la señal a la salida, esto es $y(t) = x(t)$.

Se sustituye el filtro pasabanda ideal H_{BP} por un filtro RLC con transferencia $H_{RLC}(j\omega)$ como en la parte (d).

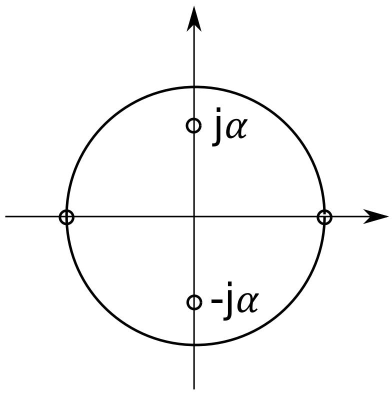
(g) Hallar las condiciones en los parámetros R, L y C para que la frecuencia y ganancia de resonancia sean ω_{BP} y A_{BP} hallados en la parte anterior. No es necesario resolver R, L y C.

(h) Bosquejar el espectro de $y(t)$ en este caso.

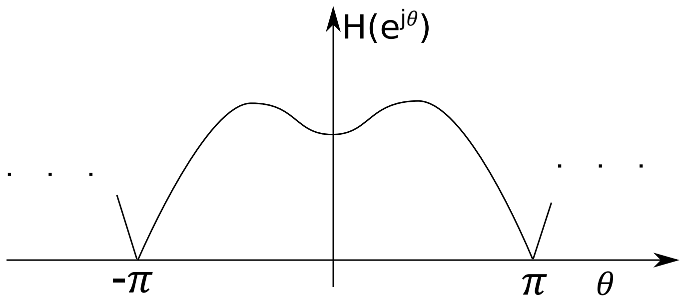
Solución

Problema 1

(a) H tiene 4 ceros en total: $z = \pm 1$ y $z = \pm j\alpha$.
También hay un polo de orden 4 en $z = 0$ (los términos $1 - c_i z^{-1}$ introducen cada uno un cero y un polo en 0; o también puede verse que hay un término z^{-4} en la expansión de $H(z)$).



(b)



(c) $H(z) = \beta(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - j\alpha z^{-1})(1 + j\alpha z^{-1}) = 1 + (\alpha^2 - 1)z^{-2} - \alpha^2 z^{-4}$
Evaluando en la circunferencia unidad, $H(e^{j\theta}) = 1 + (\alpha^2 - 1)e^{-2j\theta} - \alpha^2 e^{-4j\theta}$

(d) De $H(z)$ se identifica $h[n] = \delta[n] + (\alpha^2 - 1)\delta[n-2] - \alpha^2\delta[n-4]$.

(e) Un FIR es siempre estable.
El filtro sólo puede ser de fase lineal (FIR tipo III con coeficientes 1,0,0,0,-1) si $\alpha^2 = 1$, caso trivial que no tiene sentido considerar porque daría respuesta frecuencial 0 en frecuencia $\pi/2$. Por lo tanto, no es de fase lineal.

(f) La respuesta frecuencial es simétrica alrededor de $\pi/2$; esto se puede ver de la disposición simétrica de ceros y polos. Por lo tanto la respuesta en $\pi/4$ y $3\pi/4$ serán iguales en módulo. Entonces hay que igualar $|H(e^{j\pi/4})|$ con $|H(e^{j\pi/2})|$. Las soluciones son las raíces del polinomio $1 - 4\alpha^2 + \alpha^4$, que son $\alpha = \pm 1.93$ y $\alpha = \pm 0.518$.
El signo de α es irrelevante; no afecta el diagrama de ceros y polos (notar que en $h[n]$ siempre aparece α^2).
Las respuestas al impulso son respectivamente:

$$h_1[n] = [1.00000 \; 0 \; 2.73205 \; 0 \; -3.73205]$$

$$h_2[n] = [1.00000 \; 0 \; -0.73205 \; 0 \; -0.26795]$$

(g) $|H(e^{j\pi/2})| = \beta \times 2(1 - \alpha^2) = \beta \times 1.4641$, por lo tanto debe ser $\beta = 0.683$.

(h) La respuesta frecuencial vale 0 en frecuencias 0 y π; y vale 1 en frecuencias $\pi/4$, $\pi/2$ y $3\pi/4$. En $\pi/2$ hay un mínimo relativo, y hay 2 máximos relativos entre esta frecuencia y las otras 2.

Problema 2

(a) $H_{RLC}(s) = \frac{RCs}{1+RCs+LCs^2}$, con polos complejos cuando $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$.

(b) Para $R > 0$ el sistema es estable. Para $R = 0$ la señal de entrada $\sin(t/\sqrt{LC})$ da una salida no acotada.

(c) Al pasar por el eje imaginario a frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ el módulo del vector entre el polo con parte imaginaria positiva y el punto $(0, j\omega)$ se minimiza. El efecto de la variación por el otro polo se desestima. También se desestima el efecto del cero.

(d) Es un pasabanda de segundo orden con máximo en la frecuencia de resonancia y caida a cero hacia ω cero e infinito.

(e) Son dos pulsos de altura $\alpha/2$ y ancho $2W$ centrados en ω_0 y $-\omega_0$. Se requiere $\omega_0 > W$

(f) $\omega_{BP} = \omega_0$, $W_{BP} = 2W$ y $A = 2/\alpha$.

(g) $\omega_0 = \omega_R := \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ fija la frecuencia de resonancia ω_R en ω_0. La otra ecuación sale de imponer $H(\omega_R) = 2\alpha$.

(h) El espectro resultante es la suma del espectro $\frac{1}{2}H_{RLC}(j\omega)+\frac{1}{2}H_{RLC}(-j\omega)$, que no es simétrico, restringido a $\omega \in (-W, W)$.