Señales y Sistemas

Examen

Instituto de Ingeniería Eléctrica

11 de agosto de 2020

Indicaciones

- La prueba consistirá en dos problemas a resolver en 3 horas y media.
- Comienza a las 10:00hs y culmina a las 13:30. A partir de las 13:30 tendán 30 minutos extra para digitalizar y entregar el documento como se explica más adelante.
- Solamente podrá consultarse la hoja oficial de fórmulas para evaluaciones disponible en la página EVA del curso. Fuera de esta hoja no está permitido el uso de material.
- La entrega del parcial consiste en un documento (preferiblemente PDF) conteniendo fotos ordenadas de todas las hojas que se utilizaron para resolver los ejercicios propuestos. Se realizará a través de la tarea (Entrega examen agosto 2020) en el EVA de la asignatura especialmente destinada a estos efectos.
- Cada hoja entregada deberá indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La primera hoja deberá indicar además el total de hojas entregadas.
- En caso de tener problemas con la entrega por EVA, enviar su trabajo por email a: seys.iie.fing.udelar@gmail.com. En caso de tener problemas con el envío de email puede usar un sistema de transferencia de archivos de su-preferencia como WeTransfer.com (sin usuario) u otro de su preferencia; en este caso se debe compartir con el email seys.iie.fing.udelar@gmail.com. y avisarnos con otro email a esa misma dirección.
- La prueba es individual y para garantizarlo deberán estar conectados por zoom con video encendido durante todo el examen enfocando a ustedes. Al realizar su entrega se aceptan las condiciones mencionadas anteriormente, y que para la misma rige el Reglamento General de Estudios de la Facultad de Ingeniería .
- Se evaluará explícitamente la *claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones*. En las gráficas o bosquejos *deben indicarse claramente los ejes y puntos relevantes*. Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.
- Para aprobar esta parte se deberá demostrar solvencia en los temas del curso, por ejemplo, resolver un problema completo y resolver las partes fundamentales del otro, o abordar los dos problemas con suficiente profundidad.
- Quienes aprueban esta parte escrita pasarán al oral. Se publicará en EVA un cronograma aproximado para los orales de quienes aprueben la parte escrita del examen.

Problema 1

Se tiene una señal $x_1(t) = \cos(2\pi\, 3000\, t)$, la cual se muestrea a una frecuencia $f_s = 18000\,\mathrm{Hz}$. La señal muestreada $x_1[n]$ se procesa con un filtro digital H definido por la siguiente ecuación de recurrencia, donde la entrada es $x[n]$ y la salida $y[n]$:

$$y[n] + \beta y[n-1] \;=\; x[n] + \alpha x[n-1] + x[n-2]$$

(a) Graficar el espectro de $x_1(t)$ y $x_1[n]$.

(b) Hallar la transferencia del filtro $H(z)$ para que la salida en régimen sea nula cuando la entrada es $x_1[n]$, y que la respuesta frecuencial de H en continua valga 5.

En el resto del ejercicio se trabajará con el filtro H hallado en la parte anterior.

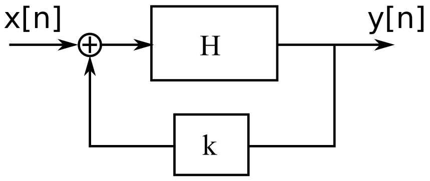
(c) Estudiar la estabilidad del filtro digital determinado en la parte anterior.

(d) Descomponer el filtro digital H como un filtro no recursivo (FIR) H_1, seguido por un filtro puramente recursivo (IIR) H_2.

(e) Dar el diagrama de bloques del filtro digital H implementado según la parte anterior utilizando sumadores multiplicadores y retardos.

(f) Calcular la respuesta al impulso del filtro digital H.

El filtro H se realimenta con un factor constante k como se muestra en la figura.



(g) Indicar la estabilidad del nuevo sistema para $k = 0.2$ y para $k = -0.2$

Sea H_{RE} la opción del filtro realimentado que es estable.

(h) Dar el diagrama de polos y ceros de H_{RE}.

(i) Bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia de H_{RE}.

Problema 2

Se busca generar una señal sinusoidal de media cero y frecuencia ω_c a partir de la onda cuadrada $x(t)$ de período T y amplitud A que muestra en la figura 1. Para ello utilizará el SLIT H causal definido por la siguiente ecuación diferencial, que implementa un filtro pasa-banda *no ideal.*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega_c \frac{dy}{dt} + \omega_c^2 y(t) = a\frac{dx}{dt}.$$

(a) Hallar la transferencia del sistema $H(s)$, mostrar que el sistema es estable y bosquejar el módulo su respuesta en frecuencia.

(b) Determinar el valor de $a > 0$ para que el sistema tenga ganancia unitaria (0dB) a frecuencia ω_c.

Sea H_N el sistema compuesto por N filtros H conectados en serie.

(c) Hallar la respuesta en frecuencia $H_N(j\omega)$ del filtro H_N.

(d) Determinar el menor valor de N tal que el filtro $H_N(j\omega)$ atenúe 20 dB los componentes de la entrada a frecuencia $\omega = 2\omega_c$.

(e) Calcular la serie de Fourier y la transformada de Fourier de tiempo continuo de la señal $x(t)$ de la figura 1 y determinar el valor de T para que los armónicos se sitúen en las frecuencias $\omega_k = k\omega_c$ para $k = 1, 2, \ldots$.

(f) Calcular los valores c_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ tales que la salida del filtro H_N tome la forma $y(t) = \sum_k c_k e^{j\omega_k t}$ cuando la entrada es la señal cuadrada $x(t)$ de la parte anterior. Deducir que $y(t)$ tiene media nula.

(g) Considerando $c(t) = C\cos(\omega_c t + \phi)$ como el primer armónico de la señal $y(t)$, calcular C y ϕ.[1]

Sea $c(t)$ el primer armónico calculado en la parte anterior y $r(t)$ el residuo dado por $r(t) = y(t) - c(t)$. Se define la distorsión armónica de la señal $y(t)$ como $D = P_r/P_c$ donde P_c y P_r son las potencias de las señales $c(t)$ y $r(t)$ respectivamente.

(h) Calcular la distorsión armónica de $y(t)$ en función de los coeficientes c_k de su serie de Fourier.

[1]Recordar que el primer armónico de la serie de Fourier es la suma de los dos términos de frecuencia fundamental ω_1 correspondientes a $k = \pm 1$.

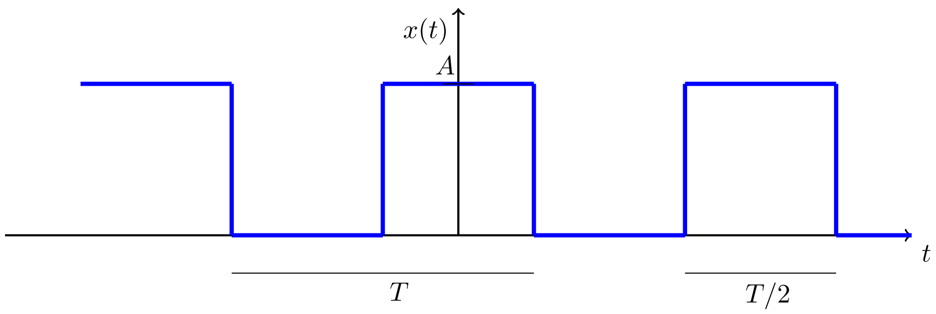
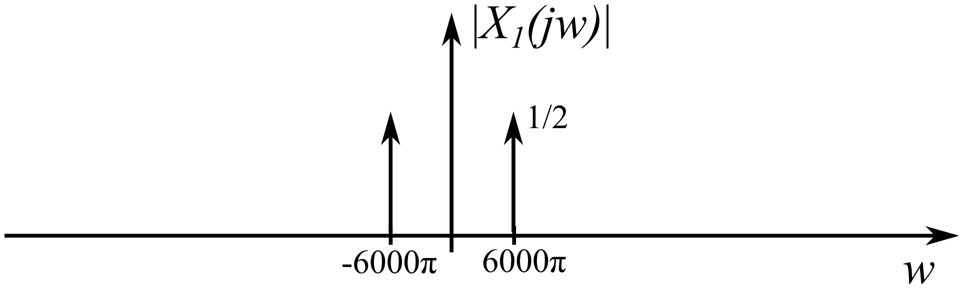


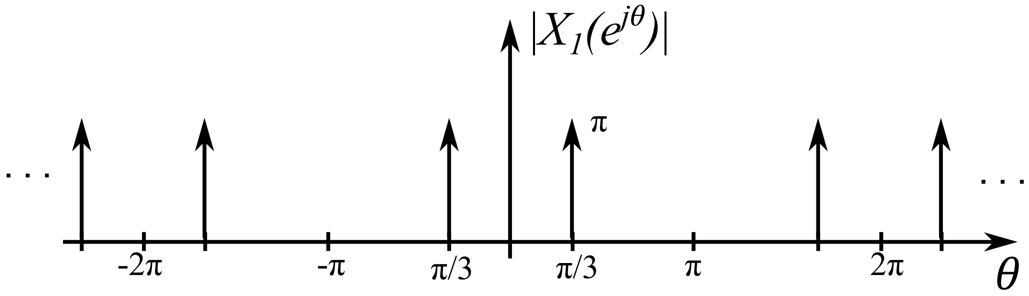
Figura 1: Onda cuadrada de amplitud A, período T y ciclo de trabajo de $50\,\%$.

Solución

Problema 1

(a)





(b) $x_1[n]$ es una sinusoidal a frecuencia $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por lo cual deben existir un par de ceros sobre el circulo unidad a frecuencias $\pm\theta_1$.
Entonces, el numerador debe ser proporcional a $(z - e^{j\theta_1})(z - e^{-j\theta_1}) = z^2 - 2z\cos(\theta_1) + 1$. Por lo tanto, $\alpha = -2\cos(\theta_1) = -1$.
En continua, la ganancia es 5. Sustituyendo frecuencia 0 en la respuesta frecuencial, se obtiene $\beta = -4/5$.

(c) $|\beta| < 1$, por lo cual el filtro es estable (el polo del filtro está en $z = -\beta$).

(d) Para simplificar el estudio de $h[n]$, considero 2 filtros en cascada: $k[n] - \frac{4}{5}k[n-1] = x[n]$ seguido por $y[n] = k[n] - k[n-1] + k[n-2]$.
El filtro recursivo tiene respuesta $h_1[n] = (4/5)^n u[n]$, y el filtro no recursivo tiene respuesta $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(e) Hacer dibujo.

(f) Haciendo la convolución de los dos filtros, queda $h[n] = h_1[n] - h_1[n-1] + h_1[n-2] = (4/5)^n\{u[n] - \frac{5}{4}u[n-1] + \frac{25}{16}u[n-2]\}$.

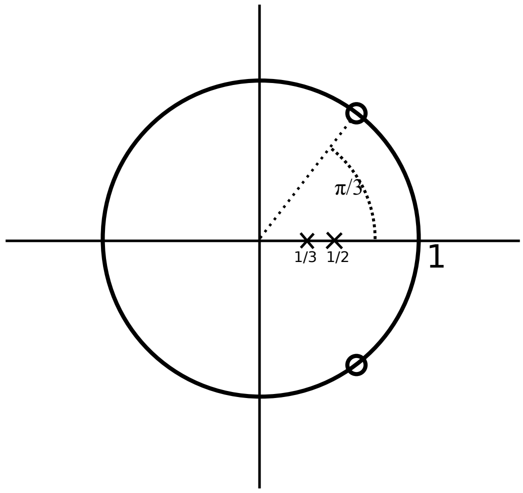
(g)

$$H_1(z) = \frac{H(z)}{1 - kH(z)}$$

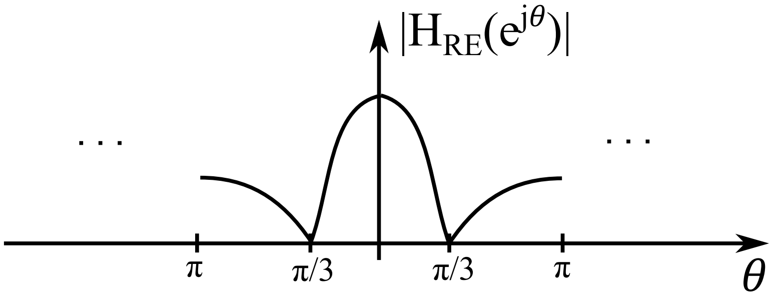
$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - k - (4/5 - k)z^{-1} - kz^{-2}}$$

Para $k = 0.2$ los polos quedan en $z = 1$ y $z = -0.25$, al estar el polo en la circunferencia unidad, no puede ser estable. Para $k = -0.2$ los polos quedan en $z = 0.5$ y $z = 1/3$, en este caso el sistema es estable ya que la circunfencia unidad está en la ROC que corresponde a $|z| > 0.5$.

(h)



(i)



Problema 2

(a) $H(s) = \frac{as}{(s+\omega_c)^2}$

(b) $a = 2\omega_c$.

(c) $H_N(j\omega) = \left(\frac{2j\omega_c\omega}{(\omega_c+j\omega)^2}\right)^N$

(d) $20\log|H_N(2j\omega)| = 20\log\left(\frac{4\omega_c^2}{\omega_c^2+4\omega_c^2}\right)^N = 20N\log\left(\frac{4}{5}\right) \leq -20 \ \rightarrow N \geq 11.$

(e) $X(j\omega) = 2\pi \sum_k \frac{A}{k\pi} \sin(k\pi/2)\delta(\omega - \omega_k)$ con $\omega_k = 2\pi k/T$.

(f) $c_k = \frac{A}{k\pi} \sin(k\pi/2) H_N(k\omega_c)$.

(g) Sumando los términos de la serie correspondientes a $k \pm 1$

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{A}{\pi} \sin(\pi/2) H_N(\omega_c) e^{j\omega_c t} + \frac{A}{-\pi} \sin(-\pi/2) H_N(-\omega_c) e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A}{\pi} H_N(\omega_c) e^{j\omega_c t} + \frac{A}{\pi} H_N(-\omega_c) e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A}{\pi} \left(\left(\frac{2}{(j+1)^2} \right)^N \right) e^{j\omega_c t} + \frac{A}{\pi} \left(\left(\frac{2}{(1-j)^2} \right)^N \right) e^{-j\omega_c t} \\ &= \frac{A}{\pi} \left(e^{-N\pi/2} e^{j\omega_c t} + e^{N\pi/2} e^{-j\omega_c t} \right) \\ &= \frac{2A}{\pi} \cos\left(\omega_c t - N\pi/2\right) \end{aligned}$$

(h) $Pc = 2\|c_1\|^2$

$P_r = 2 \sum_{k=2}^{\infty} |c_k|^2 = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \sin(k\pi/2) \left(\frac{2k\omega_c^2}{(\omega_c + jk\omega_c)^2} \right)^N \right|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \left(\frac{2n}{(1+4n^2)} \right)^{2N}$